انتگرال‌گیری عددی گاوس

انتگرال زیر را در نظر بگیرید (شکل ۲ ـ ۱ ـ الف)

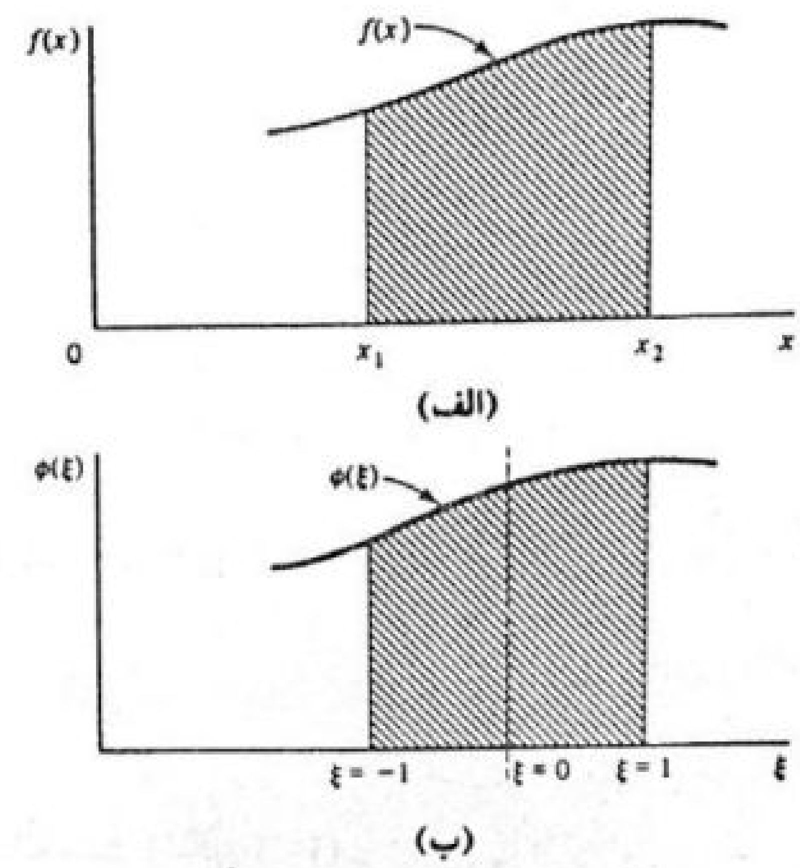
$$I_x = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

انتگرال فوق را در شکل بی‌بعد می‌توان به‌صورت زیر نوشت (شکل ۲ ـ ۱ ـ ب)

$$I_x = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\int_{-1}^{1} \phi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\,I_\xi$$

که در آن:

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\,\xi$$



شکل ۲ ـ ۱

$$f(x) = \phi(\xi)$$

$$dx = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)\,d\xi$$

حال توجه خود را روی انتگرال I_ξ معطوف می‌داریم:

$$I_\xi = \int_{-1}^{+1} \phi(\xi)\, d\xi$$

جواب این انتگرال را می‌توان به‌صورت مقادیر عددی تابع در n نقطه نوشت:

$$I_\xi = \int_{-1}^{+1} \phi(\xi)\, d\xi = w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2) + \dots + w_n f(\xi_n)$$

که در آن ξ_i نقاط نمونه (مقادیری در حد فاصل -1 تا $+1$) و w_i ضریب وزنی آن نقطه است. با انتخاب n بزرگتر، تعداد نقاط نمونه بزرگتر شده و دقت انتگرال‌گیری افزایش می‌یابد.

به‌عنوان مثال فقط اگر یک نقطهٔ نمونه انتخاب نماییم، انتگرال به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\, d\xi = w_1 f(\xi_1)$$

اگر تابع f به‌صورت چندجمله‌ای از درجهٔ اول فرض شود، خواهیم داشت:

$$f(\xi) = a_0 + a_1 \xi$$

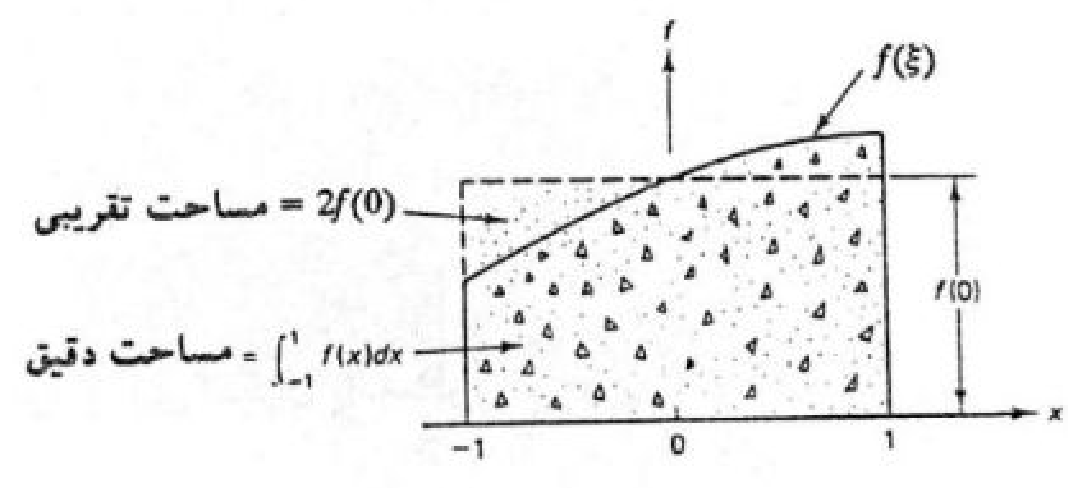
$$\text{خطای انتگرال‌گیری} = \int_{-1}^{+1} (a_0 + a_1 \xi)\, d\xi - w_1 f(\xi_1) = 0$$

$$= 2a_0 - w_1 (a_0 + a_1 \xi_1) = 0$$
$$= a_0 (2 - w_1) - w_1 a_1 \xi = 0$$

خطا وقتی صفر خواهد شد که $w_1 = 2$ و $\xi_1 = 0$ باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$I = \int_{-1}^{1} f(\xi)\, d\xi \simeq 2f(0)$$

که همان قانون نقطهٔ میانه است (شکل ۲ ـ ۲)



شکل ۲ ـ ۲

دو نقطهٔ نمونه

اگر دو نقطهٔ نمونه انتخاب گردد، انتگرال به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi)\,d\xi = w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2)$$

با توجه به‌وجود چهار مجهول w_1 و w_2 و ξ_1 و ξ_2، تابع $f(\xi)$ به‌صورت چندجمله‌ای درجه سوم فرض می‌شود:

$$f(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3$$

$$\text{خطا} = \left[\int_{-1}^{1} (a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3)\,d\xi\right] - \left[w_1 f(\xi_1) + w_2 f(\xi_2)\right]$$

برای خطای صفر باید داشته باشیم:

$$w_1 + w_2 = 2$$
$$w_1\xi_1 + w_2\xi_2 = 0$$
$$w_1\xi_1^2 + w_2\xi_2^2 = \frac{2}{3}$$
$$w_1\xi_1^3 + w_2\xi_2^3 = 0$$

که از حل معادلات فوق به‌دست می‌آید:

$$w_1 = w_2 = 1$$
$$-\xi_1 = \xi_2 = 1/\sqrt{3} = 0.5773502692$$

در جدول ۲ ـ ۱ نتایج تا ۸ نقطهٔ نمونه ارائه شده است.

جدول ۲ ـ ۱ ضرایب انتگرال‌گیری عددی گوس تا ۸ نقطهٔ نمونه

n	$\pm\xi_i$	R_i
1	0.0	2.0
2	0.5773502692	1.0
3	0.7745966692 0.0	0.5555555556 0.8888888889
4	0.8611363116 0.3399810436	0.3478548451 0.6521451549
5	0.9061798459 0.5384693101 0.0	0.2369268851 0.4786286705 0.5688888889
6	0.9324695142 0.6612093865 0.2386191861	0.1713244924 0.3607615730 0.4679139346
7	0.9491079123 0.7415311856 0.4058451514 0.0	0.1294849662 0.2797053915 0.3818300505 0.4179591837
8	0.9602898565 0.7966664774 0.5255324099 0.1834346425	0.1012285363 0.2223810345 0.3137066459 0.3626837834

مثال

انتگرال زیر را محاسبه نمایید:

$$I=\int_{-1}^{+1}\left[3e^{x}+x^{2}+\frac{1}{(x+2)}\right]dx$$

حل:

انتخاب یک نقطهٔ نمونه:

$$n=1 \rightarrow w_1=2\,,x_1=0$$
$$I\cong 2f(0)=2\times 3.5\cong 7.0$$

انتخاب دو نقطهٔ نمونه:

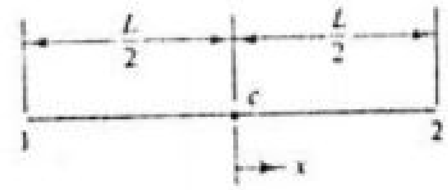
$$w_1=w_2=1$$
$$x_1=-0.57735\ ,\ x_2=+0.57735$$
$$I\cong 8.7857$$

حل دقیق $I=8.8165$ می‌باشد که انطباق خوبی با انتخاب دو نقطهٔ نمونه دارد. انتخاب نقاط نمونهٔ بیشتر، منجر به‌جوابهای بسیار دقیقتری خواهد شد.

روابط انتگرال‌گیری

۱ ـ خط ـ مبدأ در مرکز خط c (شکل ۲ ـ ۳)

$$x_1+x_2=0 \qquad \int_L dL=L$$
$$\int_L x\,dL=0 \qquad \int_L x^2dL=\left(x_1^2+x_2^2\right)\frac{L}{6}=\frac{L^3}{12}$$
$$\int_L x^3dL=0 \qquad \int_L x^4dL=\left(x_1^4+x_2^4\right)\frac{L}{10}=\frac{L^3}{80}$$



شکل ۲ ـ ۳

۲ ـ مثلث ـ مبدا در مرکز سطح c (شکل ۲ ـ ۴)

۲ ـ مثلث ـ مبدا در مرکز سطح c (شکل ۲ ـ ۴)

$$x_1+x_2+x_3=0 \qquad y_1+y_2+y_3=0$$

$$\int_A dA=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(x_{ij}\,y_{ik}-x_{ik}\,y_{ij}\right)\begin{cases} i,j,k=1,2,3 \\ i,j,k=2,3,1 \\ i,j,k=3,1,2 \end{cases}$$

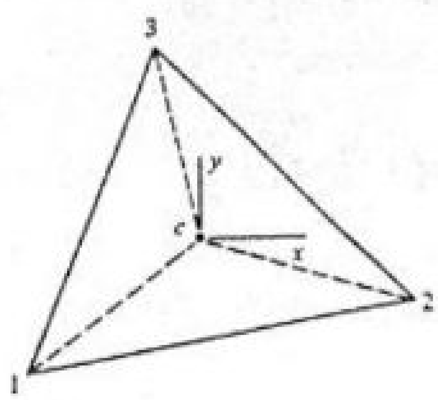
$$\int_A x\,dA=\int_A y\,dA=0 \qquad \int_A x^2 dA=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)\frac{A}{12}$$

$$\int_A xy\,dA=\left(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3\right)\frac{A}{12} \qquad \int_A x^3 dA=\left(x_1^3+x_2^3+x_3^3\right)\frac{A}{30}$$

$$\int_A x^2y\,dA=\left(x_1^2y_1+x_2^2y_2+x_3^2y_3\right)\frac{A}{30} \qquad \int_A x^4 dA=\left(x_1^4+x_2^4+x_3^4\right)$$

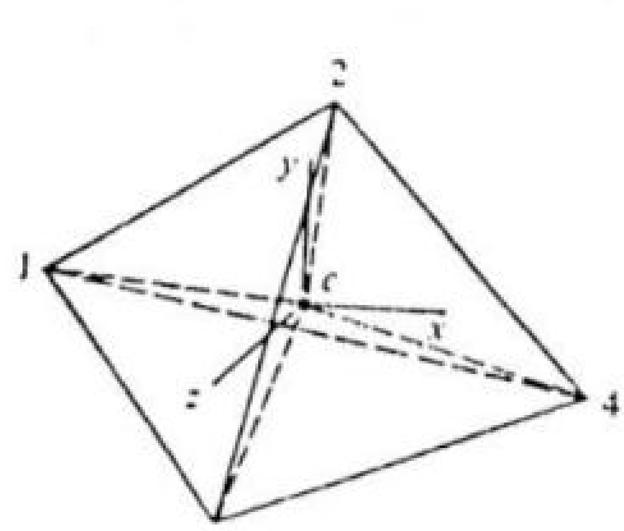
$$\int_A x^3y\,dA=\left(x_1^3y_1+x_2^3y_2+x_3^3y_3\right)\frac{A}{30} \qquad \int_A x^2y^2 dA=\left(x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_3^2y_3^2\right)\frac{A}{30}$$

برای انتگرالهایی که نشان داده نشده است، جای x و y را عوض کنید.



شکل ۲ ـ ۴ مثلث

۳ ـ چهاروجهی ـ مبدأ در مرکز هندسی c (شکل ۲ ـ ۵)



شکل ۲ ـ ۵ چهاروجهی

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0$$
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 0$$

$$\int_v dV = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

$$\int_v x\,dV = \int_v y\,dV = \int_v z\,dV = 0$$

$$\int_v x^2 dV = \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2\right)\frac{V}{20}$$

$$\int_v y^2 dV = \left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2\right)\frac{V}{20}$$

$$\int_v z^2 dV = \left(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2\right)\frac{V}{20}$$

$$\int_v xy\,dV = \left(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4\right)\frac{V}{20}$$

$$\int_v yz\,dV = \left(y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 + y_4 z_4\right)\frac{V}{20}$$

$$\int_v zx\,dV = \left(z_1 x_1 + z_2 x_2 + z_3 x_3 + z_4 x_4\right)\frac{V}{20}$$

رابطه‌سازی ایزوپارامتریک

۷ـ۱ مقدمه

جزء محدود، وقتی ایزوپارامتریک[1] نامیده می‌شود که مختصات و تغییرمکان هر نقطهٔ داخلی با یک تابع یکسان برحسب مختصات و تغییرمکان گره‌ها درون‌یابی شوند. به‌عبارت دیگر توابع هندسی و توابع شکل یکسان هستند . چنین اجزای محدودی هر دو شرط سازگاری هندسی و سازگاری تغییرمکان را برآورده می‌نمایند. اگر درجهٔ توابع هندسی کمتر از توابع شکل باشند، آن جزء ساب پارامتریک[2] و اگر حالت عکس وجود داشته باشد، جزء سوپر پارامتریک[3] نامیده می‌شود.

از آنجایی‌که اضلاع اجزای محدود ایزوپارامتریک غالباً منحنی می‌باشند، برای مدل کردن شرایط مرزی هندسی یک محیط پیوسته، از اجزای ساب پارامتریک مناسبتر هستند. لیکن با توجه به‌این حقیقت که تغییرمکانهای عمومی در مختصات محلی تعریف می‌شوند و مشتق گرفتن از آنها در دستگاه مختصات کلی لازم است، روابط کرنش ـ تغییرمکان آنها پیچیده می‌باشد. همچنین گاهی مواقع به‌علت عدم امکان انجام انتگرالگیریهای صریح، استفاده از انتگرالگیریهای عددی لازم می‌شود.

۷ ـ ۲ دستگاه مختصات طبیعی

مشخصات هندسی بعضی از اجزای محدود مشخص، استفاده از دستگاه مختصات بدون بعد (یا طبیعی[4]) را به‌جای دستگاه مختصات کارتزین، ایجاب می‌کند. رابطه‌سازی اجزای محدود مثلثی، چهارضلعی و اجزای محدود سه‌بعدی همتای آنها، مثالهایی در این مورد می‌باشند. مشتق‌گیری و انتگرال‌گیریهای لازم درحصول ماتریسهای سختی و بارهای گره‌ای معادل، با استفاده از مختصاتی که با هندسی محلی هماهنگ[5] هستند، بسیار ساده می‌شود. شکل ۷ ـ ۱ یک جزء خطی را نشان می‌دهد که برای آن محل نقطهٔ دلخواه ۳ توسط مختصات طولی بدون‌بعد به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$\xi_1 = \frac{L_1}{L} \qquad \xi_2 = \frac{L_2}{L} \tag{الف}$$

از شکل مشاهده می‌شود که:

$$L_1 + L_2 = L \tag{ب}$$

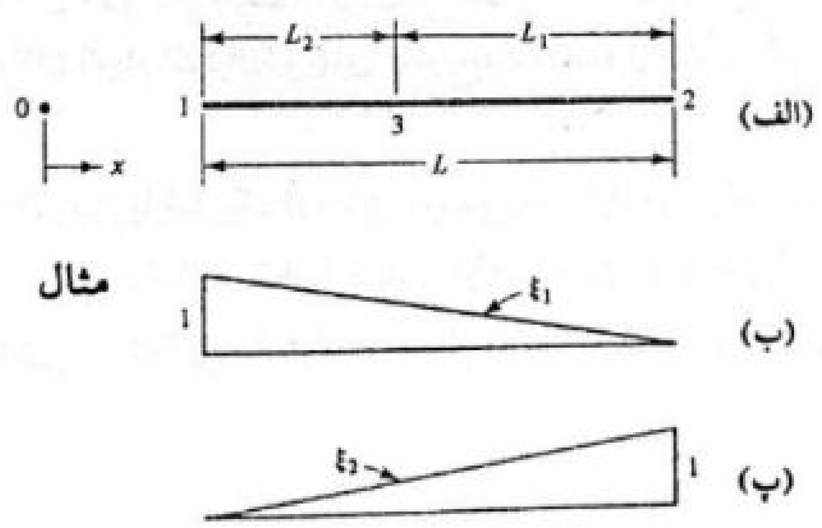
بنابراین:

$$\xi_1 + \xi_2 = 1 \tag{۷ ـ ۲ ـ ۱}$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که ξ_1 و ξ_2 به‌یکدیگر وابسته هستند. می‌توان مختصات کلی x را برحسب مختصات محلی ξ_1 و ξ_2 به‌صورت زیر نوشت:

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \tag{۷ ـ ۲ ـ ۲}$$

$x = x_1$ نقطهٔ ۱ (ابتدا) ، $x = x_2$ نقطهٔ ۲ (انتها) ، $x =$ مختصات هر نقطهٔ دلخواه



مثال

$x_1=10$

$x_2=20$

$L_2=4 \rightarrow \xi_2=0.4$

$L_1=6 \rightarrow \xi_1=0.6$

$x_3=\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 = 0.6 \times 10 + 0.4 \times 20 = 14$

شکل ۷ ـ ۱ مختصات طبیعی برای یک خط

به‌طور عکس، می‌توان مختصات محلی را برحسب مختصات کلی با حل روابط ۷ ـ ۲ ـ ۱ و ۷ ـ ۲ـ۲ برای ξ_1 و ξ_2، به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} x_2 & -1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \qquad (۳ - ۲ - ۷)$$

در اشکال ۷ ـ ۱ ـ ب و پ، رابطهٔ ۷ ـ ۲ ـ ۳ رسم شده است. مشاهده می‌شود که مختصات طبیعی ξ_1 و ξ_2 مشابه توابع شکل تغییرمکان f_1 و f_2 جزء محدود محوری می‌باشند (به‌شکل ۵ ـ ۸ مراجعه شود). بنابراین جزء محوری با دو گره و تابع تغییرمکان خطی، یک جزء ایزوپارامتریک می‌باشد.

مشتق‌گیری از تابع $f(\xi_1, \xi_2)$ نسبت به x با استفاده از قانون زنجیری مشتقات جزیی، دارای شکل زیر است:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} \qquad (۴ - ۲ - ۷)$$

با در نظر گرفتن رابطهٔ ۷ ـ ۲ ـ ۳، مشتقات جزیی ξ_1 و ξ_2 نسبت به x برابرند با:

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x} = -\frac{1}{L} \qquad \frac{\partial \xi_2}{\partial x} = \frac{1}{L} \qquad (\text{پ})$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطهٔ ۷ ـ ۲ ـ ۴ به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{L}\left(-\frac{\partial f}{\partial \xi_1} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}\right) \qquad (۵ - ۲ - ۷)$$

انتگرال‌گیری از جملات یک چندجمله‌ای در مختصات طولی ξ_1 و ξ_2، با استفاده از رابطهٔ زیر امکان‌پذیر است (مأخذ ۲):

$$\int_{x_1}^{x_2} \xi_1^a \xi_2^b \, dx = \int_0^1 \xi_1^a (1-\xi_1)^b L \, d\xi_1 = \frac{a!\,b!}{(a+b+1)!} L \qquad (۶ - ۲ - ۷)$$

در رابطهٔ فوق، $a!$ (بخوانید فاکتوریل a) نشان‌دهندهٔ حاصلضرب $a(a-1)(a-2)\dots(1)$ می‌باشد. فاکتریل صفر ($0!$) مساوی واحد است.

مثال ۱:

$$\int_L \xi_1^2 \xi_2^3 \, dL = \frac{2!\,3!}{6!} L = \frac{L}{60}$$

مثال ۲:

$$\begin{aligned}
\int_L x^2 \, dL &= \int_L (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)^2 \, dL \\
&= \int_L (\xi_1^2 x_1^2 + 2\xi_1 x_1 \xi_2 x_2 + \xi_2^2 x_2^2) \, dL \\
&= \frac{2!}{3!} x_1^2 L + 2\frac{1}{3!} x_1 x_2 L + \frac{2!}{3!} x_2^2 L \\
&= (x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2) \frac{L}{3}
\end{aligned}$$

اگر مبدأ x در وسط جزء خطی قرار داشته باشد، $x_1 = -L/2$، $x_2 = -L/2$ و $x_1 + x_2 = 0$ می‌باشد. بنابراین $(x_1 + x_2)^2 = 0$ منتهی می‌شود به:

$$x_1 x_2 = -\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$$

با قرار دادن رابطهٔ فوق در نتیجهٔ حاصل از انتگرال، به‌دست می‌دهد:

$$\int_L x^2 \, dL = (x_1^2 + x_2^2) \frac{L}{6}$$

یا:

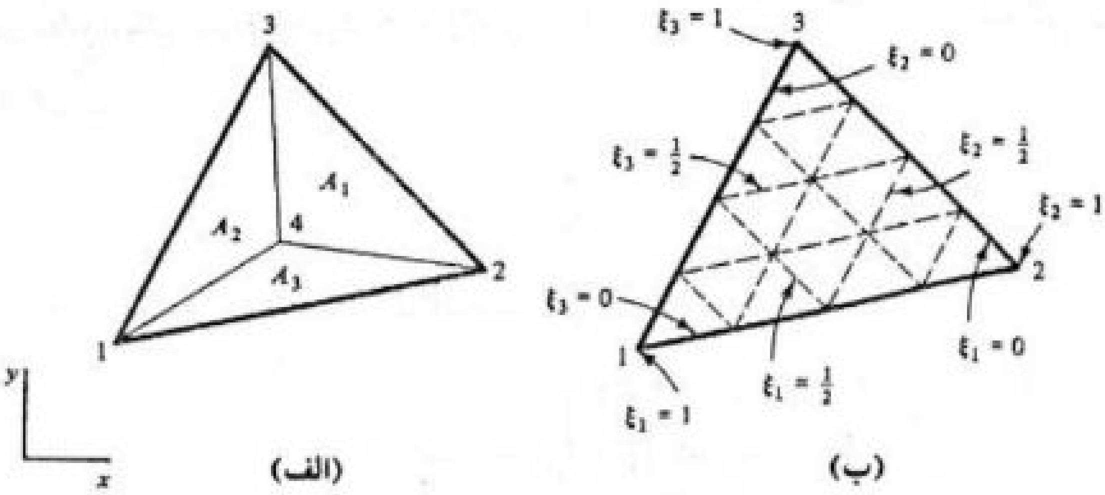
$$\int_L x^2 \, dL = \frac{L^3}{12}$$

این نتایج همانهایی هستند که در پیوست الف داده شده‌اند.

جزء ایزوپارامتریک مثلثی

در شکل ۷ - ۲ - الف یک جزء محدود مثلثی با مساحت A نشان داده شده است. رئوس این مثلث با اعداد ۱ و ۲ و ۳ شماره‌گذاری شده‌اند. محل هر نقطهٔ داخلی مثل ۴ را می‌توان با تقسیم جزء محدود به‌مساحتهای A_1، A_2 و A_3 به‌دست آورد. مختصات سطحی بدون بعد[6] مثلث به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\xi_1 = \frac{A_1}{A} \qquad \xi_2 = \frac{A_2}{A} \qquad \xi_3 = \frac{A_3}{A} \qquad (ت)$$



شکل ۷ ـ ۲ مختصات طبیعی برای یک مثلث

با توجه به‌شکل ملاحظه می‌شود:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A \qquad \text{(ث)}$$

بنابراین:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1 \qquad (۷ - ۲ - ۷)$$

رابطهٔ فوق نشان می‌دهد که ξ_1، ξ_2 و ξ_3 از یکدیگر مستقل نیستند. شکل ۷ ـ ۲ ـ ب نشان می‌دهد که در نقطهٔ ۱ مقدار $\xi_1 = 1$ و در امتداد لبهٔ ۲ ـ ۳، $\xi_1 = 0$ می‌باشد. همچنین در شکل مذکور مشاهده می‌شود که تغییرات ξ_1 از نقطهٔ ۱ تا لبهٔ مقابل، خطی است و عین همین وضعیت برای ξ_2 و ξ_3 وجود دارد. وقتی‌که مختصات کلی x و y برحسب مختصات محلی نوشته شوند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x &= \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 \\ y &= \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 + \xi_3 y_3 \end{aligned} \qquad (۸ - ۲ - ۷)$$

از طرف دیگر، با حل معادلات ۷ ـ ۲ ـ ۷ و ۷ ـ ۲ ـ ۸ برای ξ_1، ξ_2 و ξ_3، می‌توان مختصات محلی را برحسب مختصات کلی x و y به‌صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & -y_{23} & x_{23} \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & -y_{31} & x_{31} \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & -y_{12} & x_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \qquad (۹ - ۲ - ۷)$$

مقایسهٔ رابطهٔ ۷ ـ ۲ ـ ۹ با رابطهٔ ۶ ـ ۲ ـ ۱ ـ ب نشان می‌دهد که مختصات محلی ξ_1، ξ_2 و ξ_3 مشابهٔ توابع شکل f_1، f_2 و f_3 برای جزء مثلثی با کرنش ثابت می‌باشند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که جزء مثلثی با کرنش ثابت، یک جزء ایزوپارامتریک می‌باشد. برای ساده کردن رابطهٔ ۷ ـ ۲ ـ ۹، A_{ij}

به‌صورت سطح مثلثی تعریف می‌شود که رئوس آن i و j و مبدأ دستگاه مختصات کلی باشد. به‌علاوه فرض گردد:

$$\begin{matrix} a_1 = x_{23} & a_2 = x_{31} & a_3 = x_{12} \\ b_1 = -y_{23} & b_2 = -y_{31} & b_3 = -y_{12} \end{matrix} \qquad \text{(ج)}$$

با قرار دادن تعاریف فوق در رابطهٔ ۷ - ۲ - ۹ به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 2A_{23} & b_1 & a_1 \\ 2A_{31} & b_2 & a_2 \\ 2A_{12} & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \qquad (۷ - ۲ - ۱۰)$$

با استفاده از قانون مشتق‌گیری زنجیری، مشتق تابع $f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ نسبت به x و y به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial x} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \xi_3}\frac{\partial \xi_3}{\partial y} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial \xi_i}\frac{\partial \xi_i}{\partial y} \end{aligned} \qquad (۷ - ۲ - ۱۱)$$

با استفاده از رابطهٔ ۷ - ۲ - ۱۰، مشاهده می‌شود:

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2A} \qquad \frac{\partial \xi_i}{\partial y} = \frac{a_i}{2A} \qquad \text{(چ)}$$

در نتیجه رابطهٔ ۷ - ۲ - ۱۱ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{3} b_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{3} a_i \frac{\partial f}{\partial \xi_i} \qquad (۷ - ۲ - ۱۲)$$

انتگرال چندجمله‌ای برحسب جملات ξ_1، ξ_2 و ξ_3 از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید (۲):

$$\int_A \xi_1^a \xi_2^b \xi_3^c \, dA = \frac{a!\,b!\,c!}{(a+b+c+2)!}(2A) \qquad (۷ - ۲ - ۱۳)$$

سهولت انجام انتگرال فوق، یکی از فواید اولیهٔ استفاده از مختصات سطحی است.

مثال ۳

$$\int_A \xi_1^3 \xi_2 \xi_3^2 \, dA = \frac{3!\,1!\,2!}{8!}(2A) = \frac{A}{1680}$$

مثال ۴

$$\begin{aligned}\int_A x^2\,dA &= \int_A (\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)^2\,dA \\ &= \int_A (\xi_1^2 x_1^2 + \xi_2^2 x_2^2 + \xi_3^2 x_3^2 + 2\xi_1 x_1 \xi_2 x_2 + 2\xi_2 x_2 \xi_3 x_3 + 2\xi_1 x_1 \xi_3 x_3)\,dA \\ &= \frac{2}{4!}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)(2A) \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)\frac{A}{6}\end{aligned}$$

اگر مرکز مختصات در مرکز هندسی مثلث قرار داشته باشد، $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ می‌شود. بنابراین $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 0$ خواهد شد و می‌توان نوشت:

$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -\tfrac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

با قرار دادن رابطهٔ فوق در نتیجهٔ به‌دست آمده برای انتگرال، به‌دست می‌آید:

$$\int_A x^2\,dA = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)\frac{A}{12}$$

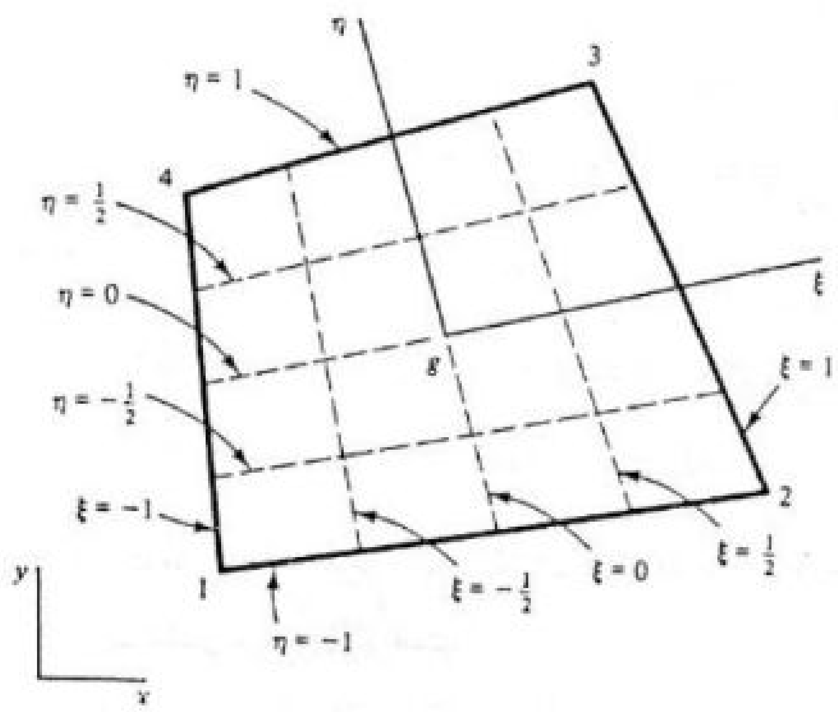
جزء ایزوپارامتریک چهارضلعی

شکل ۷ ـ ۳ نشان‌دهندهٔ مختصات طبیعی بدون بعد ξ و η برای یک جزء محدود چهارضلعی[۷] می‌باشد. نقطهٔ g مرکز هندسی[۸] این جزء است که برای آن:

$$x_g = \tfrac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \qquad y_g = \tfrac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4) \qquad \text{(ح)}$$

این نقطه لزوماً مرکز سطح[۹] جزء محدود نیست. توجه داشته باشید که در امتداد لبهٔ ۲ ـ ۱، $\eta = -1$ و در امتداد لبهٔ ۲ ـ ۳، $\xi = 1$ و در امتداد لبهٔ ۳ ـ ۴، $\eta = 1$ و در امتداد لبهٔ ۱ ـ ۴، $\xi = -1$ می‌باشد. با انترپولهٔ (درون‌یابی) خطی در امتدادهای ξ و η، مختصات مرکز هندسی به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned}x &= \tfrac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)x_1 + (1+\xi)(1-\eta)x_2 \\ &\qquad + (1+\xi)(1+\eta)x_3 + (1-\xi)(1+\eta)x_4] \\ y &= \tfrac{1}{4}[(1-\xi)(1-\eta)y_1 + (1+\xi)(1-\eta)y_2 \\ &\qquad + (1+\xi)(1+\eta)y_3 + (1-\xi)(1+\eta)y_4]\end{aligned} \qquad \text{(۷ ـ ۲ ـ ۱۴ ـ الف)}$$



شکل ۷ـ۳ مختصات طبیعی برای یک جزء محدود چهارضلعی

یا:

$$x = f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3 + f_4 x_4 = \sum_{i=1}^{4} f_i x_i$$
$$y = f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 + f_4 y_4 = \sum_{i=1}^{4} f_i y_i \qquad (۷ـ۲ـ۱۴ـب)$$

که در آن:

$$f_1 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \qquad f_2 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)$$
$$f_3 = \tfrac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \qquad f_4 = \tfrac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \qquad (۷ـ۲ـ۱۵)$$

توابع فوق مختصات کلی را برحسب مختصات طبیعی جزء چهارضلعی به‌دست می‌دهند. لیکن از آنجایی‌که روابط ۷ـ۲ـ۱۴ـالف دوخطی[۱۰] هستند. مختصات محلی ξ و η نمی‌توانند برحسب مختصات کلی x و y بیان شوند.

با استفاده از قانون مشتق‌گیری زنجیری، مشتق $f(\xi, \eta)$ نسبت به x و y به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y} \qquad (خ)$$

یا:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} \end{bmatrix} \qquad (د)$$

از آنجایی‌که ξ و η برحسب x و y تعریف نشده‌اند، عناصر (درایه‌های) ماتریس ضرایب رابطهٔ (د) معلوم نمی‌باشند. لیکن اگر به‌روش مخالف عمل شده و با استفاده از قانون مشتق‌گیری زنجیری، مشتق f نسبت به ξ و η محاسبه شود به‌دست می‌آید،

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \xi} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial f}{\partial \eta} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta}\end{aligned} \qquad \text{(ذ)}$$

یا:

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial \xi}\\ \frac{\partial f}{\partial \eta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi}\\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}\\ \frac{\partial f}{\partial y}\end{bmatrix} \qquad \text{(ر)}$$

برای وضعیت جدید، عناصر ماتریس ضرایب را به‌آسانی می‌توان با مشتق‌گیری از روابط ۷ ـ ۲ ـ ۱۴ تعیین نمود. این آرایه[11]، ماتریس ژاکوبی[12] **J** نامیده می‌شود که شامل مشتقات مختصات کلی نسبت به‌مختصات محلی می‌باشد. بنابراین:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_{,\xi} & y_{,\xi}\\ x_{,\eta} & y_{,\eta}\end{bmatrix} \qquad (۱۶ - ۲ - ۷)$$

عناصر ماتریس ژاکوبی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}J_{11} &= x_{,\xi} = f_{1,\xi}x_1 + f_{2,\xi}x_2 + f_{3,\xi}x_3 + f_{4,\xi}x_4 = \sum_{i=1}^{4} f_{i,\xi}x_i\\ J_{12} &= y_{,\xi} = f_{1,\xi}y_1 + f_{2,\xi}y_2 + f_{3,\xi}y_3 + f_{4,\xi}y_4 = \sum_{i=1}^{4} f_{i,\xi}y_i\\ J_{21} &= x_{,\eta} = f_{1,\eta}x_1 + f_{2,\eta}x_2 + f_{3,\eta}x_3 + f_{4,\eta}x_4 = \sum_{i=1}^{4} f_{i,\eta}x_i\\ J_{22} &= y_{,\eta} = f_{1,\eta}y_1 + f_{2,\eta}y_2 + f_{3,\eta}y_3 + f_{4,\eta}y_4 = \sum_{i=1}^{4} f_{i,\eta}y_i\end{aligned} \qquad (۱۷ - ۲ - ۷)$$

شکل ماتریسی رابطهٔ فوق به‌صورت زیر است:

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}_L\mathbf{C}_N \qquad (۱۸ - ۲ - ۷)$$

ماتریس D_L در رابطهٔ فوق، شامل مشتقات نسبت به‌مختصات محلی است. بنابراین:

$$\mathbf{D}_L = \begin{bmatrix} f_{1,\xi} & f_{2,\xi} & f_{3,\xi} & f_{4,\xi} \\ f_{1,\eta} & f_{2,\eta} & f_{3,\eta} & f_{4,\eta} \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -(1-\eta) & (1-\eta) & (1+\eta) & -(1+\eta) \\ -(1-\xi) & -(1+\xi) & (1+\xi) & (1-\xi) \end{bmatrix} \qquad (۱۹ـ۲ـ۷)$$

ماتریس $\mathbf{C}_N$ نیز شامل مختصات گره‌ها می‌باشد که به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{C}_N = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \qquad (۲۰ـ۲ـ۷)$$

با مقایسهٔ روابط (د) و (ر) مشاهده می‌شود که ماتریس ضرایب در رابطهٔ (د)، معکوس ماتریس ژاکوبی می‌باشد. با استفاده از تعریف عمومی عکس ماتریس $\mathbf{J}^{-1}$ از روی $\mathbf{J}$ به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{\mathbf{J}^*}{|\mathbf{J}|} = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\begin{bmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{bmatrix} = \frac{1}{|\mathbf{J}|}\begin{bmatrix} y_{,\eta} & -y_{,\xi} \\ -x_{,\eta} & x_{,\xi} \end{bmatrix} \qquad (۲۱ـ۲ـ۷)$$

که در آن $\mathbf{J}^*$ نشان‌دهندهٔ ماتریس الحاقی[13] $\mathbf{J}$ و $|\mathbf{J}|$ دترمینان آن می‌باشد. مقدار دترمینان توسط رابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$|\mathbf{J}| = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21} = x_{,\xi}y_{,\eta} - x_{,\eta}y_{,\xi} \qquad (۲۲ـ۲ـ۷)$$

برای تعیین مشتقات تمام توابع نسبت به x و y، می‌توان رابطهٔ (د) را مجدداً به‌کار برد. بنابراین:

$$\begin{bmatrix} f_{i,x} \\ f_{i,y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1}\begin{bmatrix} f_{i,\xi} \\ f_{i,\eta} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3, 4) \qquad (۲۳ـ۲ـ۷)$$

رویهم رفته می‌توان نوشت:

$$\mathbf{D}_G = \mathbf{J}^{-1}\mathbf{D}_L = (\mathbf{D}_L\mathbf{C}_N)^{-1}\mathbf{D}_L \qquad (۲۴ـ۲ـ۷)$$

ماتریس $\mathbf{D}_G$ که توسط رابطهٔ فوق تعریف می‌شود، شامل مشتقات f_i نسبت به‌مختصات کلی می‌باشد یعنی:

$$\mathbf{D}_G = \begin{bmatrix} f_{1,x} & f_{2,x} & f_{3,x} & f_{4,x} \\ f_{1,y} & f_{2,y} & f_{3,y} & f_{4,y} \end{bmatrix} \qquad (۲۵ـ۲ـ۷)$$

با محاسبهٔ عناصر $\mathbf{D}_G$ به‌دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
D_{G11} &= \frac{1}{4|\mathbf{J}|}[-(1-\eta)J_{22} + (1-\xi)J_{12}] \\
D_{G12} &= \frac{1}{4|\mathbf{J}|}[(1-\eta)J_{22} + (1+\xi)J_{12}] \\
D_{G13} &= \frac{1}{4|\mathbf{J}|}[(1+\eta)J_{22} - (1+\xi)J_{12}] \\
D_{G14} &= \frac{1}{4|\mathbf{J}|}[-(1+\eta)J_{22} - (1-\xi)J_{12}] \\
D_{G21} &= \frac{1}{4|\mathbf{J}|}[(1-\eta)J_{21} - (1-\xi)J_{11}] \\
D_{G22} &= \frac{1}{4|\mathbf{J}|}[-(1-\eta)J_{21} - (1+\xi)J_{11}] \\
D_{G23} &= \frac{1}{4|\mathbf{J}|}[-(1+\eta)J_{21} + (1+\xi)J_{11}] \\
D_{G24} &= \frac{1}{4|\mathbf{J}|}[(1+\eta)J_{21} + (1-\xi)J_{11}]
\end{aligned}
\qquad (۷-۲-۲۶)
$$

با استفاده از روش فوق می‌توان تمام عناصر $\mathbf{D}_G$ را به‌صورت عددی محاسبه نمود.

به‌علت ظهور دترمینان ماتریس ژاکوبی $\mathbf{J}$ در مخرج روابط فوق، معمولاً نمی‌توان برای تعیین ماتریس سختی و بارهای گره‌ای معادل از انتگرال‌گیری صریح استفاده کرد و انتگرال‌گیری عددی لازم می‌گردد.

۷-۳ انتگرال‌گیری عددی

برای خیلی از انواع اجزای محدود، انتگرال‌گیری صریح برای تعیین ماتریس سختی و بارهای گره‌ای معادل امکان‌پذیر نیست. این مسئله شامل اکثر اجزای ایزوپارامتریک که در قسمتهای آینده مورد مطالعه قرار می‌گیرند، می‌شود. در چنین حالاتی لازم می‌شود که از تکنیکهای انتگرال‌گیری عددی استفاده شود. یکی از دقیقترین و مناسبترین روشها، روش کوادراتورگوس[۱۴] می‌باشد که در فصل دوم و پیوست ب تشریح شده است. اگرچه پیوست ب فقط برای انتگرال یک‌بعدی تدوین یافته است، لیکن آن را می‌توان به‌حالات ۲ و ۳ بعدی نیز تعمیم داد. در این فصل، انتگرال‌گیری فقط برای اجزای دوبعدی لازم می‌گردد.

برای جزء چهارضلعی در مختصات کارتزین، نوع انتگرال‌گیری لازم به‌شکل زیر می‌باشد:

$$I = \int\int f(x, y)\, dx\, dy \qquad \text{(الف)}$$

در صورتی‌که انتگرال فوق ابتدا به‌مختصات طبیعی ξ و η تبدیل شود، حل آن آسانتر خواهد بود. برای این کار باید با استفاده از روابط ۷ ـ ۲ ـ ۱۴، تابع f برحسب ξ و η نوشته شود. به‌علاوه، حدود انتگرال نیز باید به ۱- تا ۱ تبدیل شده و جزء سطح $dA = dx\,dy$ برحسب $d\xi$ و $d\eta$ نوشته شود. برای این منظور، در شکل ۷ ـ ۴ جزء بی‌نهایت کوچک dA در مختصات طبیعی نشان داده شده است. در این شکل، $\mathbf{r}$ بردار مکان یک نقطهٔ عمومی در مختصات کارتزین x و y، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \tag{ب}$$

نرخ[15] تغییرات $\mathbf{r}$ نسبت به ξ برابر است با:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\,\mathbf{j} \tag{پ}$$

همچنین نرخ تغییرات $\mathbf{r}$ نسبت به η برابر است با:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\,\mathbf{j} \tag{ت}$$

اگر روابط (پ) و (ت) در $d\xi$ و $d\eta$ ضرب شوند، دو ضلع مجاور متوازی‌الاضلاع بی‌نهایت کوچک dA در شکل ۷ ـ ۴ به‌دست می‌آید. سطح dA را می‌توان حاصلضرب برداری مختلط زیر به‌دست آورد:

$$dA = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}\,d\xi \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}\,d\eta\right) \cdot \mathbf{k} \tag{ث}$$

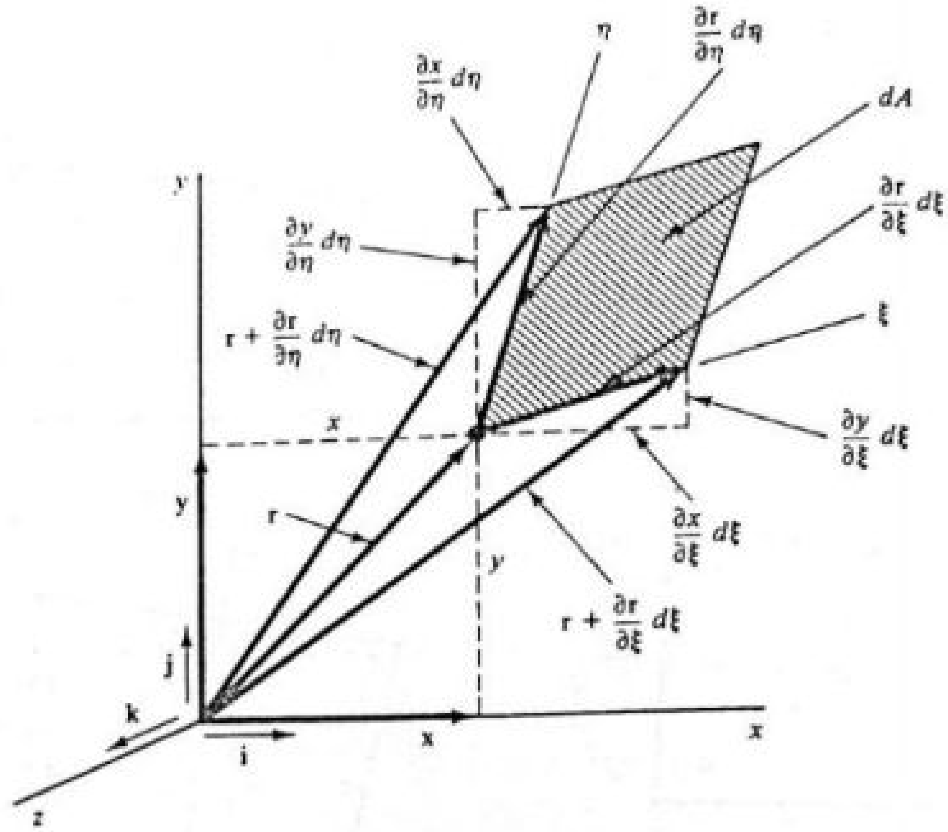
با قرار دادن روابط (پ) و (ت) در رابطهٔ (ث) به‌دست می‌آید:

$$dA = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)\partial\xi\,\partial\eta \tag{ج}$$

جملات موجود در داخل پرانتز رابطهٔ (ج) را می‌توان به‌صورت یک دترمینان نوشت:

$$dA = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi\,d\eta = |\mathbf{J}|\,d\xi\,d\eta \tag{۷ ـ ۳ ـ ۱}$$

که در آن، $\mathbf{J}$ ماتریس ژاکوبی (به‌بخش ۷ ـ ۲ مراجعه شود) و $|\mathbf{J}|$ دترمینان آن می‌باشد. بنابراین شکل تازهٔ انتگرال رابطهٔ (الف) به‌صورت زیر درمی‌آید:



شکل ۷ ـ ۴ جزء بی‌نهایت کوچک در مختصات طبیعی

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(\xi, \eta)\,|\mathbf{J}|\, d\xi\, d\eta \qquad (۲ - ۳ - ۷)$$

با دو بار متوالی اعمال روش کودراتورگوس نتیجه گرفته می‌شود:

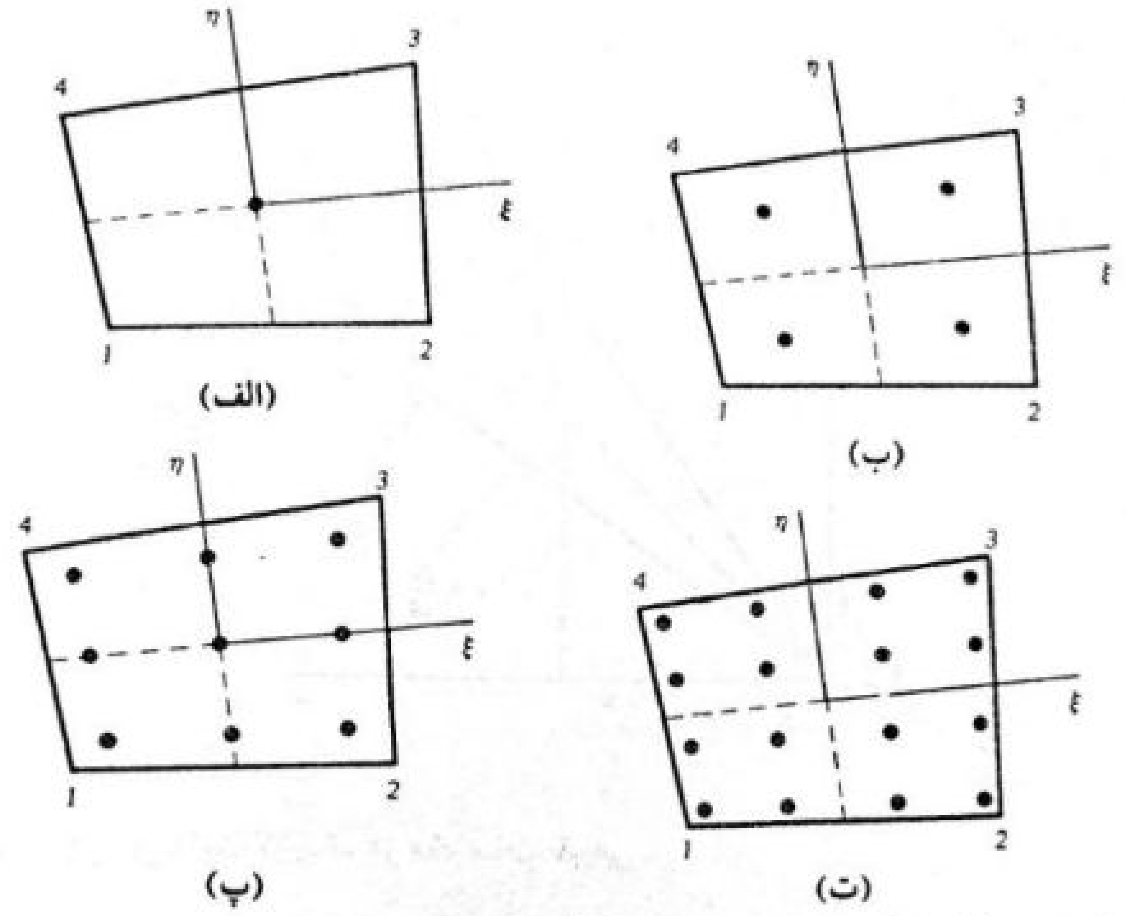
$$I = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} R_j R_k f(\xi_j, \eta_k)\,|\mathbf{J}(\xi_j, \eta_k)| \qquad (۳ - ۳ - ۷)$$

که در آن R_j و R_k ضرایب وزنی[16] برای نقطهٔ (ξ_j, η_k) می‌باشند. در شکل ۷ ـ ۵ نقاط انتگرال‌گیری[17] برای چهار حالت $n = 1, 2, 3, 4$ در هر طرف، برای یک جزء چهارضلعی نشان داده شده است.

مثال ۱

مطلوب است انتگرال عددی از تابع $f(\xi, \eta) = \xi^2\eta^2$ برای یک جزء مستطیلی با ابعاد $2a \times 2b$ تحت حالت تنش صفحه‌ای. برای این حالت، با توجه به‌رابطهٔ ۷ ـ ۳ ـ ۱ دترمینان ماتریس ژاکوبی برابر است با:

$$|\mathbf{J}| = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab$$



شکل ۷ـ۵ نقاط انتگرال‌گیری برای جزء چهارضلعی (الف) n=1 ، (ب) n=2 ، (پ) n=3 و (ت) n=4 (در هر ردیف)

با قرار دادن $n = 2$، از جدول ب ـ ۱ پیوست (ب) می‌توان نوشت:

$$\xi_1 = -\xi_2 = \eta_1 = -\eta_2 = -0.577\ldots \qquad R_1 = R_2 = 1$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطهٔ ۷ ـ ۳ ـ ۳ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} I &= (1)(1)[(-0.577)^2(-0.577)^2 + (0.577)^2(-0.577)^2 \\ &\quad + (0.577)^2(0.577)^2 + (-0.577)^2(0.577)^2]ab \\ &= 4(0.577)^4 ab \\ &= (0.444\ldots)ab \end{aligned}$$

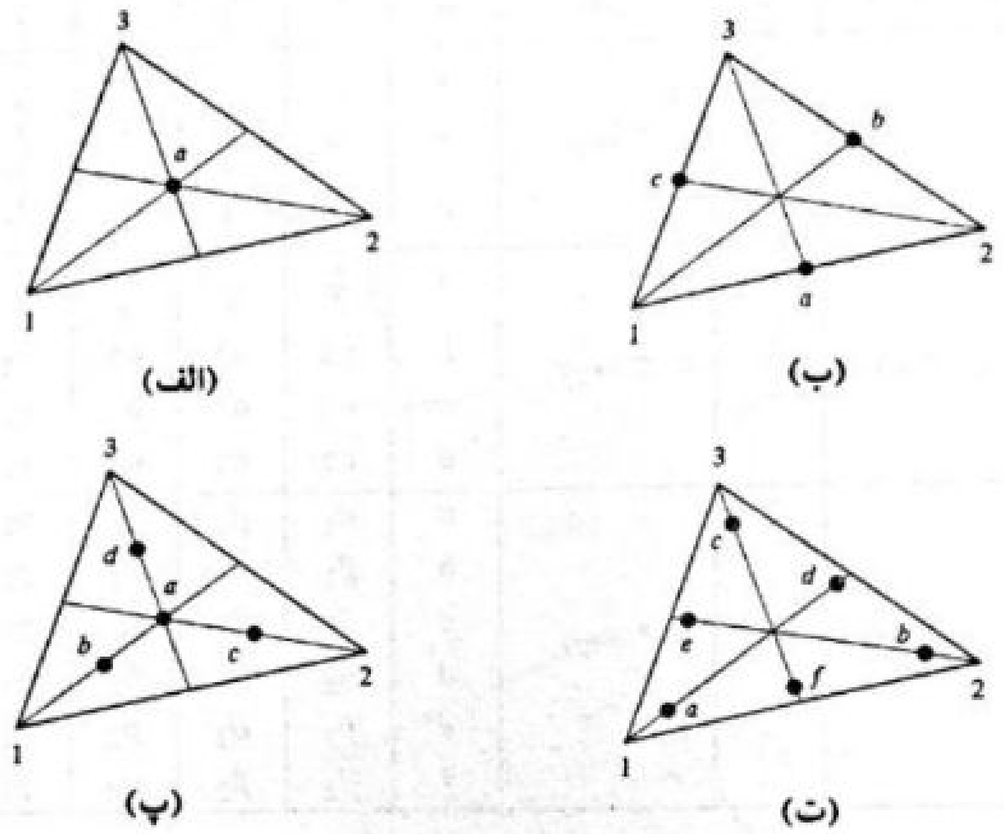
که نتیجهٔ به‌دست آمده کاملاً دقیق می‌باشد.

* * * * *

برای جزء مثلث در دستگاه مختصات طبیعی، رابطهٔ انتگرال‌گیری عددی برابر است با (مأخذ ۴):

$$I = A\sum_{j=1}^{n} W_j f(\xi_1, \xi_2, \xi_3)_j \qquad (۴ـ۳ـ۷)$$

که درآن W_j ضریب وزنی برای jامین نقطهٔ نمونه است. نقاط انتگرال‌گیری برای $n = 1, 2, 3, 4, \ldots, 6$ در شکل ۷ ـ ۶ و محل و ضرایب وزنی آنها در جدول ۷ ـ ۱ نشان داده شده است.



شکل ۷ ـ ٦ نقاط انتگرال‌گیری برای مثلث (الف) n=1 ، (ب) n=3 ، (پ) n=4 و (ت) n=6

مثال ۲

با استفاده از انتگرال‌گیری عددی با $n = 3$، مثال ۴ در بخش ۷ ـ ۲ را تکرار نمایید. از رابطهٔ ۷ ـ ۳ ـ ۴ و جدول ۷ ـ ۱ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} I &= A \sum_{j=1}^{3} W_j(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3)_j^2 \\ &= \frac{A}{3}\left[\left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3\right)^2\right] \\ &= \frac{A}{6}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3) \end{aligned}$$

که همان نتیجه‌ای است که قبلاً به‌دست آمد.

جدول ۷ ـ ۱ ثابتهای انتگرال‌گیری عددی برای مثلث

شکل	n	مرتبه	نقاط	ξ_1	ξ_2	ξ_3	W_1
۷ ـ ۶ ـ الف	1	خطی	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1
۷ ـ ۶ ـ ب	3	درجهٔ ۲	a	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{3}$
			b	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
			c	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
۷ ـ ۶ ـ پ	4	درجه ۳	a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	γ_1
			b	0.6	0.2	0.2	γ_2
			c	0.2	0.6	0.2	γ_2
			d	0.2	0.2	0.6	γ_2
۷ ـ ۶ ـ ت	6	درجه ۴	a	α_1	β_1	β_1	γ_3
			b	β_1	α_1	β_1	γ_3
			c	β_1	β_1	α_1	γ_3
			d	α_2	β_2	β_2	γ_4
			e	β_2	α_2	β_2	γ_4
			f	β_2	β_2	α_2	γ_4

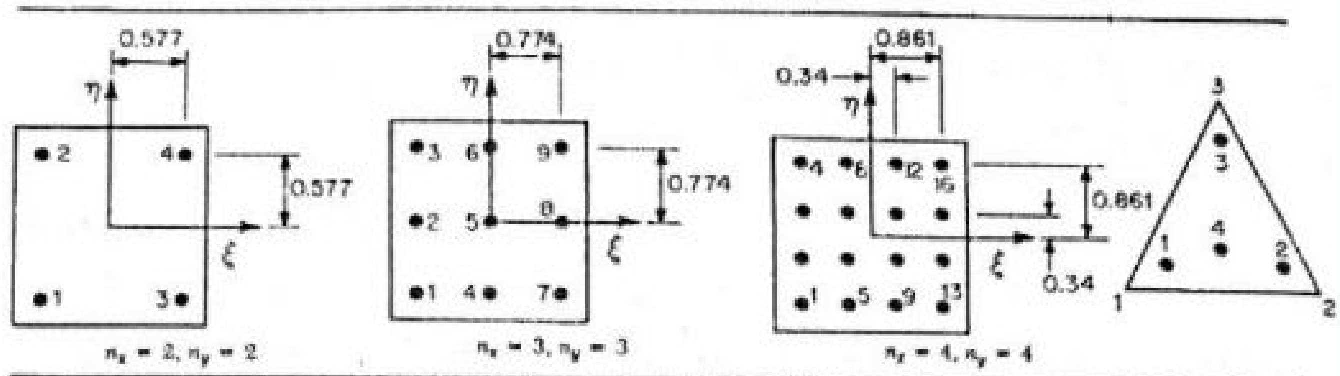
$\alpha_1 = 0.8168475730 \qquad \gamma_1 = -\frac{27}{48}$

$\beta_1 = 0.0915762135 \qquad \gamma_2 = \frac{25}{48}$

$\alpha_2 = 0.1081030182 \qquad \gamma_3 = 0.1099517437$

$\beta_2 = 0.4459484909 \qquad \gamma_4 = 0.2233815897$

جدول ب ـ ۲ محل و ضرایب وزنی برای انتگرال‌گیری گوس در اجزای محدود



(مستطیل) $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(xy)\,dxy = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} H_jH_if(a_i,a_j)$

$\pm a$	H
$n = 2$	
0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
$n = 3$	
0.77459 66692 41483 0.00000 00000 00000	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
$n = 4$	
0.86113 63115 94053 0.33998 10435 84856	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
$n = 5$	
0.90617 98459 38664 0.53846 93101 05683 0.00000 00000 00000	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889

(مثلث) $\int_A f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} H_if(L_1, L_2, L_3)$

L_1	L_2	L_3	H
1-point formula, degree of precision 1			
0.33333333	0.333333	0.333333	1.0000000
4-point formula, degree of precision 3			
0.33333 33333 33333 0.60000 00000 00000	0.33333 33333 33333 0.20000 00000 00000	0.33333 33333 33333 0.20000 00000 00000	−0.56250 00000 00000 0.52083 33333 33333
6-point formula, degree of precision 4			
0.81684 75729 50459 0.10810 30181 68070	0.09157 62135 09771 0.44594 84909 15965	0.09157 62135 09771 0.44594 84909 15965	0.10995 17436 55322 0.22338 15896 78011
12-point formula, degree of precision 6			
0.87382 19710 16996 0.50142 65096 58179 0.63650 24991 21399	0.06308 90144 91502 0.24928 67451 70910 0.31035 24510 33785	0.06308 90144 91502 0.24928 67451 70911 0.05314 50498 44816	0.05084 49063 70207 0.11678 62757 26379 0.08285 10756 18374

۸ ـ ۳ انتگرال‌گیری عددی

در بخش ۷ ـ ۳ انتگرال‌گیری عددی برای اجزای دوبعدی موردبحث قرار گرفت. در اجزای سه‌بعدی نیز به‌علت پیچیدگیهای هندسی، اغلب لازم می‌گردد که از انتگرال‌گیریهای عددی استفاده شود.

برای یک شش‌وجهی در مختصات کارتزین، انتگرالهایی که باید محاسبه شوند، دارای شکل زیر هستند.

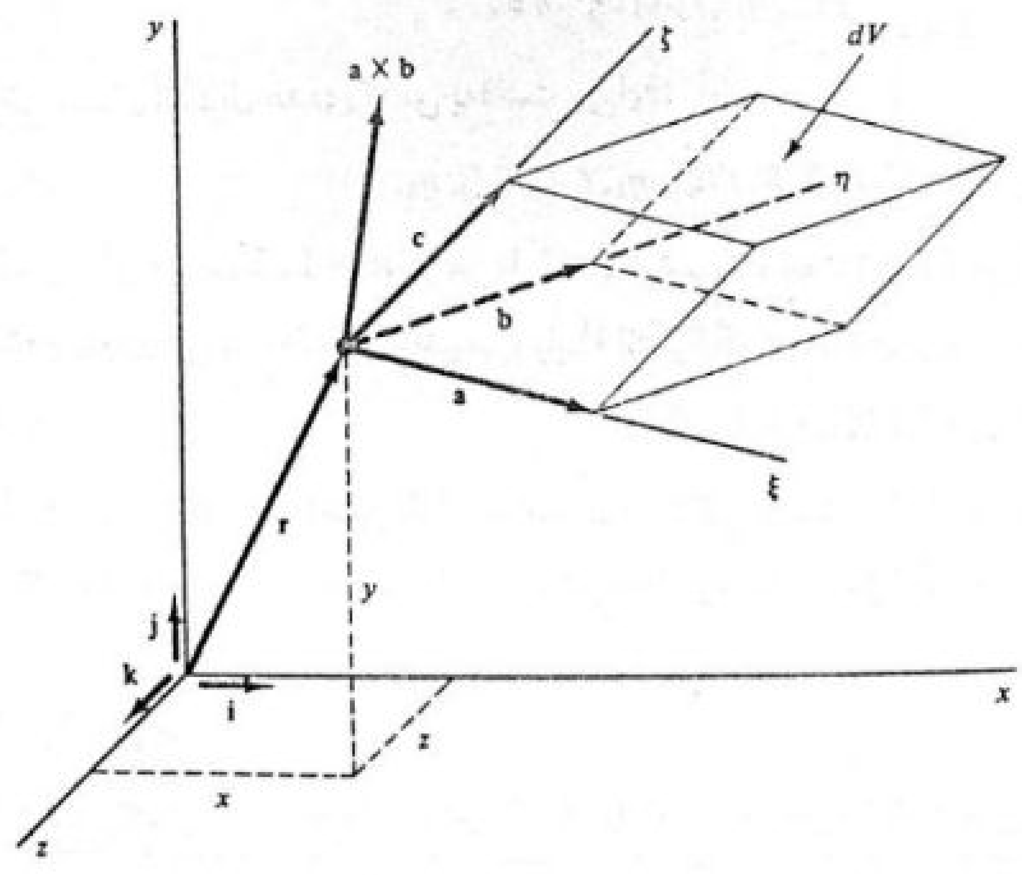
$$I = \int\int\int f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \qquad \text{(الف)}$$

قبل از انتگرال‌گیری، با استفاده از روابط ۸ ـ ۲ ـ ۱ و ۸ ـ ۲ ـ ۲، توابع برحسب مختصات طبیعی ξ و η و ζ نوشته شده و حدود انتگرال‌گیری به ۱- تا ۱ تغییر داده می‌شوند. جز حجم $dV = dx\,dy\,dz$ نیز باید برحسب $d\xi$ و $d\eta$ و $d\zeta$ نوشته شود. برای این منظور، در شکل ۸ ـ ۴ حجم بی‌نهایت کوچک dV در مختصات طبیعی نشان داده شده است. در این شکل، مختصات هر نقطه در دستگاه کارتزین، با بردار $\mathbf{r}$ نشان داده شده است. در نتیجه:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad \text{(ب)}$$

نرخ تغییرات $\mathbf{r}$ برحسب ξ و η و ζ برابر است با:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi}\mathbf{k} \qquad \text{(پ)}$$



شکل ۸ ـ ۴ حجم بی‌نهایت کوچک در مختصات طبیعی

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}=\frac{\partial x}{\partial \eta}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial \eta}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial \eta}\mathbf{k} \qquad \text{(ت)}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta}=\frac{\partial x}{\partial \zeta}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial \zeta}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial \zeta}\mathbf{k} \qquad \text{(ث)}$$

فرض کنید:

$$\mathbf{a}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi}d\xi \qquad \mathbf{b}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}d\eta \qquad \mathbf{c}=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \zeta}d\zeta \qquad \text{(ج)}$$

بردارهای رابطهٔ (ج) در شکل ۸ - ۴ به‌صورت لبه‌های متوازی‌السطوح بی‌نهایت کوچک با حجم dV نشان داده شده‌اند. این حجم را می‌توان با حاصلضرب برداری مختلط زیر نشان داد:

$$\begin{aligned} dV &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=|\mathbf{J}|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \\ &=\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi\,d\eta\,d\zeta \end{aligned} \qquad (۸-۳-۱)$$

که در آن $\mathbf{J}$ ماتریس ژاکوبی ۳×۳ و $|\mathbf{J}|$ دترمینان آن می‌باشد. بنابراین شکل تجدیدنظرشدهٔ انتگرال (الف) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$I=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(\xi,\eta,\zeta)\,|\mathbf{J}|\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \qquad (۸-۳-۲)$$

با سه بار متوالی اعمال انتگرال عددی گوس به‌دست می‌آید:

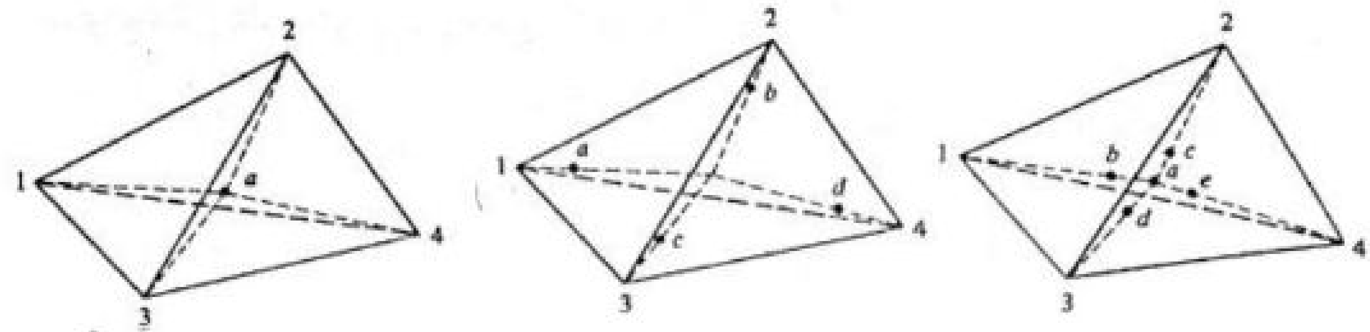
$$I=\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} R_j R_k R_\ell f(\xi_j,\eta_k,\zeta_\ell)\,|\mathbf{J}(\xi_j,\eta_k,\zeta_\ell)| \qquad (۸-۳-۳)$$

نقاط انتگرال‌گیری برای $n=1,2,3,4$ در هر طرف، به‌ترتیب ۱، ۸، ۲۷ و ۶۴ می‌باشند.

برای یک چهاروجهی در مختصات طبیعی، رابطهٔ انتگرال‌گیری عددی برابر است با:

$$I=V\sum_{j=1}^{n} W_j f(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)_j \qquad (۸-۳-۴)$$

که در آن W_j، ضریب وزن برای jامین نقطه می‌باشد. در شکل ۸ - ۵، نقاط انتگرال‌گیری برای $n=1,4,5$ نشان داده شده است. در جدول ۸ - ۱ نیز محل و ضرایب وزن آنها ارائه گردیده است.



(الف) (ب) (پ)

شکل ۸ ـ ۵ نقاط انتگرال‌گیری برای چهاروجهی (الف) n=1 (ب) n=4 (پ) n=5

جدول ۸ ـ ۱ ثابتهای انتگرال‌گیری عددی برای چهاروجهی

شکل	n	درجه	نقاط	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	W_j
۵ ـ الف	1	خطی	a	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1
۴ ـ ۵ ـ ب	4	درجه دوم	a b c d	α β β β	β α β β	β β α β	β β β α	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{4}$
۴ ـ ۵ ـ پ	5	درجه سوم	a b c d e	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{3}$	γ δ δ δ δ

$\alpha = 0.58541020 \quad \beta = 0.13819660 \quad \gamma = -\frac{4}{5} \quad \delta = \frac{9}{20}$