۳
دربارهٔ عملگرهای مربوط به اشتراک، اجتماع و متمم

نیست موجودی که نبود غرقهٔ گرداب وهم
بحر هم عمری است دست موج بالا می‌کند
بیدل دهلوی [۱]

درآمد

در فصل پیش‌رو دربارهٔ عملگرهای مجموعه‌ای که در نظریه و کاربرد مجموعه‌های فازی استفاده می‌شوند، بیشتر بحث می‌کنیم. تلاش خواهیم کرد به این پرسش‌ها پاسخ دهیم: چرا در تعریف اشتراک و اجتماع از عملگرهای $\min$ و $\max$ استفاده می‌شود؟ این کار چه توجیه مستدلی دارد؟ برای تعریف اشتراک و اجتماع از چه عملگرهای دیگری به‌جای $\min$ و $\max$ می‌توان استفاده کرد؟ چارچوب کلی عملگرهای مناسب برای اشتراک و اجتماع چیست؟ چرا عملگر متمم آن‌گونه که

[۱] بیدل دهلوی (از سخن‌سرایان طرز هندی در قرن ۱۱)، نقل از: دیوان بیدل دهلوی، به کوشش خلیلا... خلیلی، تهران، ۱۳۸۴.

در فصل دوم تعریف شده است و نه به‌صورتی دیگر؟ به‌منظور تعریف متمم یک مجموعه فازی چه روش‌های دیگری وجود دارد؟

۱.۳ ویژگی‌های عملگرهای min و max

در این بخش نشان می‌دهیم که تعمیم مفاهیم اشتراک و اجتماع، و تعریف آن‌ها برپایهٔ عملگرهای min و max، نه تنها تعریف‌هایی مناسب هستند، بلکه، تحت شرائط و فرض‌هایی معقول، تنها تعاریف ممکن‌اند. فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A و B دو مجموعه فازی از X باشند. برای هر $x \in X$، عدد $A(x)$ درجه عضویت x در مجموعه A و به سخن دیگر درجه پذیرش ما در قبول x به‌عنوان یک عضو از A است. و همین‌طور برای $B(x)$. اکنون می‌خواهیم بدانیم که درجه عضویت x در اشتراک و اجتماع این دو مجموعه چقدر است؟ یعنی درجه پذیرش ما در قبول x به‌عنوان عضوی از هر دو مجموعه A و B، هم‌چنین درجه پذیرش x به‌عنوان عضوی از A یا عضوی از B. مسلماً ما خواهان آن هستیم که به محض دانستن درجه‌های عضویت x در A و در B، درجه عضویت آن در $A \cap B$ و در $A \cup B$ با روشی روشن و دقیق معلوم شود. به سخن دیگر، می‌خواهیم دو تابع دومتغیره مانند $T(x,y)$ و $S(x,y)$ ($۰ \leq x \leq ۱$ و $۰ \leq y \leq ۱$) داشته باشیم که درجه‌های عضویت x در $A \cap B$ ودر $A \cup B$ را برحسب درجه‌های عضویت x در A و در B (و نه چیز دیگر) بیان کنند. یعنی توابعی به‌صورت زیر

$$(A \cap B)(x) = T[A(x), B(x)]$$
$$(A \cup B)(x) = S[A(x), B(x)]$$

اکنون به این موضوع مهم می‌پردازیم که توابع T و S از دید شهودی چه ویژگی‌هایی باید داشته باشند.

۱. T و S باید جابه‌جاپذیر، شرکت‌پذیر و نسبت به هم توزیع‌پذیر باشند. این‌ها ویژگی‌هایی است که به‌طور شهودی، عملگرهای اشتراک و اجتماع باید آنها را دارا باشند. وانگهی می‌خواهیم T و S تعمیمی طبیعی برای اشتراک و اجتماع معمولی باشند، و می‌دانیم که در حالت معمولی این ویژگی‌ها برقرارند.

۲. $T(x,x)$ و $S(x,x)$ باید برحسب x به‌طور اکید صعودی باشند. زیرا اگر $A(x_۱) = B(x_۱) > A(x_۲) = B(x_۲)$، مسلماً درجه پذیرش ما نسبت به عضویت $x_۱$ در مجموعه $A \cap B$ (و در $A \cup B$) بیشتر از درجه پذیرش ما نسبت به عضویت $x_۲$ در مجموعه $A \cap B$

(و در $A \cup B$) است.

۳. توابع T و S برحسب هر یک از دو متغیر x و y باید نانزولی و پیوسته باشند. زیرا وقتی درجه عضویت x در A یا در B افزایش یابد، مسلماً درجه عضویت آن در $A \cap B$ و نیز در $A \cup B$ کاهش نخواهد یافت. به‌علاوه، مایل نیستیم که افزایشی کوچک در اندازه عضویت x در A یا در B، به افزایش بزرگی در عضویت x در $A \cap B$ یا در $A \cup B$ بیانجامد.

۴. باید داشته باشیم $T(x,y) \leq \min\{x,y\}$ و $S(x,y) \geq \max\{x,y\}$. زیرا روشن است که عضویت x در $A \cup B$ دست‌کم به بزرگی عضویت x در هر یک از دو مجموعه A و B باشد. هم‌چنین درجه عضویت x در $A \cap B$ کمتر از درجه پذیرش عضویت x در هر یک از دو مجموعه A و B باشد.

۵. آشکار است که عضویت کامل در A و در B، عضویت کامل در $A \cap B$ را لازم می‌آورد، و عدم عضویت کامل در A و در B عدم عضویت کامل در $A \cup B$ را نتیجه می‌دهد. یعنی $T(۱,۱) = ۱$ و $S(۰,۰) = ۰$.

بلمان و یَرتس [۱۹]، با شیوه‌ای ابتکاری و هوشمندانه، ثابت کرده‌اند تنها توابعی که در شرایط معقول بالا صدق می‌کنند، عبارت‌اند از

$$T(x,y) = \min\{x,y\},\ S(x,y) = \max\{x,y\}$$

قضیه ۱.۳ (بلمن - یرتس) فرض کنید $I = [۰,۱]$، $T : I \times I \to I$، $S : I \times I \to I$ توابع پیوسته‌ای باشند که در شرایط زیر صدق کنند

۱) $S(x,y) = S(y,x)$ $\quad$ $T(x,y) = T(y,x)$

۲) $S[S(x,y),z] = S[x,S(y,z)]$ $\quad$ $T[T(x,y),z] = T[x,T(y,z)]$

۳) $S[x,T(y,z)] = T[S(x,y),S(x,z)]$ $\quad$ $T[x,S(y,z)] = S[T(x,y),T(x,z)]$

۴) T و S به‌عنوان توابعی یک متغیره اکیداً صعودی باشند، یعنی اگر $x_۱ < x_۲$، آن‌گاه

$$T(x_۱,x_۱) < T(x_۲,x_۲), \quad S(x_۱,x_۱) < S(x_۲,x_۲)$$

۵) T و S برحسب هر یک از دو مؤلفه، غیر نزولی و پیوسته باشند.

۶) $S(x,y) \geq \max\{x,y\}$ و $T(x,y) \leq \min\{x,y\}$

۷) $S(۰, ۰) = ۰$ و $T(۱, ۱) = ۱$
آن‌گاه منحصراً

$$T(x, y) = \min\{x, y\}, \quad S(x, y) = \max\{x, y\}$$

اثبات ابتدا نتایجی از فرض‌های یک تا هفت فراهم می‌آوریم. تابع $h(x) = T(x, x)$ را در نظر بگیرید. طبق فرض شش، $h(۰) = ۰$ و طبق فرض هفت $h(۱) = ۱$. چون تابع h پیوسته و اکیداً صعودی است، پس تابعی یک‌به‌یک از I به I است. فرض می‌کنیم $h(x) = a$، آن‌گاه با استفاده از شرایط ۳ و ۶ داریم

$$T(x, x) = a \leq S[a, T(a, a)] = T[S(a, a), S(a, a)]$$

بنابراین برپایهٔ شرط ۴ خواهیم داشت $x \leq S(a, a)$. از سوی دیگر

$$x \geq T[x, S(x, x)] = S[T(x, x), T(x, x)] = S(a, a)$$

پس باید داشته باشیم $x = S(a, a)$. بنابراین، به‌ازای هر $a \in [۰, ۱]$ داریم

$$T(x, x) = a \Leftrightarrow x = S(a, a) \tag{۱.۳}$$

از آنچه آمد روشن می‌شود که

$$T[x, S(x, x)] = S[x, T(x, x)] = x \tag{۲.۳}$$

در رابطه $x = S[x, T(x, x)]$ قرار می‌دهیم $x = S(a, a)$، و به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} S(a, a) &= S\{S(a, a), T[S(a, a), S(a, a)]\} \\ &= S[S(a, a), T(x, x)] \\ &= S[S(a, a), a] \end{aligned}$$

اکنون با جای‌گذاری $S[S(a, a), a]$ به‌جای $S(a, a)$ در سمت راست رابطه بالا و با در نظر گرفتن شرط ۲ داریم

$$S(a, a) = S\{S[S(a, a), a], a\} = S[S(a, a), S(a, a)]$$

و از شرط ۴ نتیجه می‌شود که

$$S(a, a) = a$$

. به‌طور مشابه می‌توان ثابت کرد که $T(a,a)=a$. بنابراین به‌ازای هر $a\in I$،

$$S(a,a)=T(a,a)=a \tag{۳.۳}$$

و بر پایهٔ شرط ۶ و رابطه (۳.۳) خواهیم داشت

$$S[a,T(a,b)]=T[a,S(a,b)]=a \tag{۴.۳}$$

زیرا

$$\begin{aligned} a\le S[a,T(a,b)] &= T[S(a,a),S(a,b)] \\ &= T[a,S(a,b)]\le a \end{aligned}$$

اکنون بر اساس نتایج بالا و با هدف اثبات قضیه، فرض می‌کنیم دو عدد a و $a\le b$ از I داده شده‌اند. چون بنابر شرط ۵، تابع $T(a,x)$ برحسب x نانزولی و پیوسته است و به‌علاوه از شرط ۶، $T(a,0)=0$ و از رابطه (۳.۳)، $T(a,a)=a$؛ پس باید یک c وجود داشته باشد که $T(a,c)=b$ و آن‌گاه با استفاده از رابطه (۴.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$S(a,b)=S[a,T(a,c)]=a=\max\{a,b\}$$

سرانجام، با به‌کارگیری رابطه ۳.۳ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} T(a,b) &= T[a,T(a,c)]=T[T(a,a),c] \\ &= T(a,c)=b=\min\{a,b\} \end{aligned}$$

□

نکته ۱.۳ گفتنی است که شرایط ۱ تا ۷ در مفروضات قضیه بالا، با شرایط زیر در بارهٔ مجموعه‌های معمولی متناظر است

'۱) $A\cup B=B\cup A$ $\qquad$ $A\cap B=B\cap A$

'۲) $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $\qquad$ $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

'۳) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ $\qquad$ $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

'۴) اگر $A\subset B$ آن‌گاه

$$A\cap A\subset B\cap B \qquad A\cup A\subset B\cup B$$

۵') اگر $A_1 \subset A_2$ آن‌گاه

$$A_1 \cup B \subseteq A_2 \cup B \qquad A_1 \cap B \subseteq A_2 \cap B$$

۶') $A \cup B \supseteq A, B$ $\qquad$ $A \cap B \subseteq A, B$

۷') $\phi \cup \phi = \phi$ $\qquad$ $X \cap X = X$

وکسمن و گوتشل [۸۲] ویژگی‌ها و توصیف‌های ساده‌تری برای عملگرهای min و max، هر یک به‌طور جداگانه، ارائه دادند که خود دلیل دیگری برای مناسب بودن انتخاب این عملگرها برای تعمیم مفاهیم اشتراک و اجتماع است. دو قضیه زیر در این باره است.

قضیه ۲.۳ (وکسمن - گوتشل) فرض کنید تابع $S : I \times I \to I$ در شرایط زیر صدق کند (به‌ازای هر $x, y, z \in I$)

۱) $$S(x,x) = x$$

۲) $$S[x, S(y,z)] = S[S(x,y), z]$$

۳) $$S(x,y) \geq \max\{x,y\}$$

۴) S پیوسته است.

آن‌گاه

$$S(x,y) = \max\{x,y\}$$

نکته ۲.۳ توجه دارید که سه شرط اول قضیه ۲.۳، متناظر با روابط زیر در زمینهٔ مجموعه‌های معمولی است

۱') $$A \cup A = A$$

۲') $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

۳') $$A \subset A \cup B \text{ و } B \subset A \cup B$$

مثال‌های زیر نشان می‌دهند که شرایط چهارگانه در قضیه بالا، مستقل از هم‌اند.

مثال ۱.۳. اگر

$$S(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ x & x = y \end{cases}$$

آن‌گاه شرایط ۱ و ۲ و ۳ برقرارند ولی شرط ۴ برقرار نیست.

مثال ۲.۳. اگر $S(x.y) = \max\{x, y\}$ آن‌گاه شرایط ۱ و ۲ و ۴ برقرارند ولی شرط ۳ برقرار نیست.

مثال ۳.۳. چنانچه

$$S(x,y) = \begin{cases} \min[۲x - y, ۱] & x \geq y \\ y & x < y \end{cases}$$

آن‌گاه شرایط ۱ و ۳ و ۴ برقرارند ولی شرط ۲ برقرار نیست. نمونه را فرض کنید $x = ۰/۵$ و $y = ۰/۴$ و $z = ۰/۱$.

مثال ۴.۳. اگر $S(x,y) = x + y$ آن‌گاه شرایط ۲ و ۳ و ۴ برقرارند ولی شرط ۱ برقرار نیست.

قضیه ۳.۳ (قضیه وکسمن – گاتشل) فرض کنید تابع $T : I \times I \to I$ در شرایط زیر صدق کند (به‌ازای هر $x, y, z \in I$)

۱) $$T(x,x) = x$$

۲) $$T[x, T(y,z) = T[T(x,y), z]$$

۳) $$T(x,y) \leq \min\{x,y\}$$

۴) T پیوسته است.

آن‌گاه

$$T(x,y) = \min\{x,y\}$$

در اینجا نیز سه شرط اول، متناظر با سه رابطهٔ زیر در زمینهٔ مجموعه‌های معمولی است

۱') $$A \cap A = A$$

۲') $$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

۳') $$A \cap B \subset B, A \cap B \subset A$$

می‌توان نشان داد که شرایط چهارگانه در قضیه بالا، مستقل از هم‌اند (تمرین ۱.۳).

یک بحث نظری

از مطالب این بخش نتیجه می‌شود که استفاده از عملگرهای min و max در تعریف اشتراک و

اجتماع دو مجموعه فازی، معقول، منطقی و منطبق بر شهود است. این البته به آن معنا نیست که این تعاریف، تنها تعاریفِ ممکن هستند. در بخش‌های بعد خواهیم دید که عملگرهای دیگری نیز برای تعریف اشتراک و اجتماع (و هم‌چنین متمم) پیشنهاد شده‌اند که هر یک در برخی زمینه‌های کاربردی سودمند هستند. خاطر نشان می‌سازیم که تعاریفِ اجتماع و اشتراک و متمم آن‌طور که در فصل اول گفته شد، با در نظر گرفتن توانمندی ساختاری آن‌ها حائز اهمیت است. در بخش ۴.۱ گفتیم که مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های فازیِ یک مجموعه، همراه با عملگرهای $\min$ و $\max$ برای اشتراک و اجتماع، یک شبکه توزیع‌پذیر کامل را تشکیل می‌دهند. طرفه آنکه تعریف اشتراک و اجتماع براساس عملگرهای $\min$ و $\max$ تنها تعاریف ممکنی هستند که این نوعِ ساختار را می‌سازد. البته، برپایهٔ مطالب فصل اول، ساختار بالا یک جبر بولی نیست یعنی قوانین زیر در زمینهٔ مجموعه‌های فازی برقرار نیستند

$$\begin{array}{rl} \text{شمول} & A \cup A^C = X \\ \text{طرد} & A \cap A^C = \phi \end{array}$$

از سوی دیگر، اگر بخواهیم با تعاریف دیگری برای اشتراک و اجتماع، قوانین شمول و طرد را حفظ کنیم، آن‌گاه قوانین خودتوانی اجتماع و اشتراک را از دست می‌دهیم. یعنی در این حالت قوانین

$$A \cup A = A \quad , \quad A \cap A = A$$

برقرار نیستند، که در این صورت قوانین توزیع‌پذیری نیز برقرار نخواهند بود.

به عبارت دیگر ثابت می‌شود که قوانین شمول و طرد با قوانین خودتوانی و در نتیجه توزیع‌پذیری ناسازگارند [۴۸]. بنابراین در زمینهٔ مجموعه‌های فازی نمی‌توان یک ساختار شبکه بولی کامل (پیوست ۲) - با هر تعریفی برای اجتماع و اشتراک و متمم - برقرار کرد. پس با هدف دستیابی به یک ساختار جبری مناسب، یا باید از روابط شمول و طرد و یا از روابط خودتوانی چشم‌پوشی کنیم. از سوی دیگر، تأکید بر حفظ روابط شمول و طرد، دست‌کم در برخی موارد، چندان معقول به نظر نمی‌رسد. زیرا این روابط با سرشت مجموعه‌های فازی هم‌خوانی ندارد (مثال‌های ۱۰.۱ و ۱۳.۱ را ببینید). به این دلیل است که ما روابط خودتوانی را حفظ می‌کنیم و از قوانین شمول و طرد، به‌ناچار، چشم‌پوشی می‌کنیم. می‌توان گفت که ساختار شبکه کاملی که این گونه حاصل می‌شود (ر.ک. بخش ۴.۱) ساختاری بهینه است.

۲.۳ T–نرم‌ها و S–نرم‌ها

در فصل قبل با تعریف‌های اشتراک و اجتماع بر اساس عملگرهای $\min$ و $\max$ آشنا شدیم. پیشتر گفتیم که این تعاریف، تنها تعاریف ممکن نیستند. به‌علاوه ثابت شده است که در برخی وضعیت‌ها عملگرهای $\min$ و $\max$ عملگرهای کارا و مناسبی نیستند.

تعریف‌های دیگری نیز برای اجتماع و اشتراک دو مجموعه فازی ارائه شده است که هر یک با ویژگی‌هایی که دارند، زمینه‌های کاربردی ویژه‌ای یافته‌اند. در این بخش تعدادی از مهم‌ترین آن‌ها را ارائه می‌کنیم.

نُرم‌های مثلثی

پیش از معرفی تعریف‌های گوناگون برای اشتراک و اجتماع، دو تعریف اساسی را یادآوری می‌کنیم که نرم‌های مثلثی و همنرم‌های مثلثی نامیده شده‌اند. این کار به دلیل آن است که هم عملگرهای $\min$ و $\max$ و هم بیشتر عملگرهای دیگری که در تعریف‌های اشتراک و اجتماع به‌کار برده شده‌اند، به این دو رده متعلق‌اند.

نرم‌های مثلثی و همنرم‌های مثلثی را $T-$ نُرم‌ها و $T-$ همنرم‌ها (یا $S-$ نرم‌ها) نیز می‌گویند. این دو رده از اندازه‌ها را نخستین بار ریاضی–آماردان آلمانی منگر [۵۶] در سال ۱۹۴۲ معرفی کرد و به دلیل نقشی که در نامساوی‌های مثلثی دارند به این نام خوانده می‌شوند. این اندازه‌ها، به‌دلیل ویژگی‌های بسیار جالب، در دهه‌های اخیر بیشتر مورد توجه واقع شده‌اند.

تعریف ۱.۳ تابع دومتغیره $T(x,y) : I \times I \to I$ را یک $T-$ نرم گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند

۱) $$T(x,1) = x$$

۲) یکنوایی $$x_1 \le x_2, y_1 \le y_2 \Rightarrow T(x_1,y_1) \le T(x_2,y_2)$$

۳) جابه‌جایی $$T(x,y) = T(y,x)$$

۴) شرکت‌پذیری $$T[x,T(y,z)] = T[T(x,y),z]$$

تعریف ۲.۳ تابع دومتغیره $S(x,y): I \times I \to I$ را یک T-همنرم (یا S-نرم) گوییم، اگر در شرایط زیر صدق کند

۱) $S(x, \circ) = x$

۲) یکنوایی $x_۱ \leq x_۲, y_۱ \leq y_۲ \Rightarrow S(x_۱, y_۱) \leq S(x_۲, y_۲)$

۳) جابه‌جایی $S(x,y) = S(y,x)$

۴) شرکت‌پذیری $S[x, S(y,z)] = S[S(x,y), z]$

آشکار است که $T-$ نرم‌ها و $S-$ نرم‌ها دوگان یکدیگرند. به این بیان که برای هر $T-$ نرم می‌توان یک و تنها یک $S-$ نرم تعریف کرد به‌قسمی که

$$T(x,y) = ۱ - S(۱-x, ۱-y)$$

گزاره ۱.۳ برای عملگر نفی $N(x) = ۱ - x$، زوج‌های $T-$ نرم و $S-$ نرمِ دوگان، در قوانین دمورگان تعمیم‌یافته صدق می‌کنند، یعنی

$$N[T(x,y)] = S[N(x), N(y)]$$
$$N[S(x,y)] = T[N(x), N(y)]$$

اکنون می‌پردازیم به معرفی متداول‌ترین تعاریف اشتراک و اجتماع مجموعه‌های فازی که همگی برحسب زوج‌های دوگان $T-$ نرم و $S-$ نرم ارائه شده‌اند.

۱) min و max

$$T_m(x,y) = \min(x,y) \quad , \quad S_m(x,y) = \max(x,y)$$

براساس نرم‌های بالا، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی A و B به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(A \cap B)(x) = \min\{A(x), B(x)\}$$
$$(A \cup B)(x) = \max\{A(x), B(x)\}$$

این تعاریف همان‌هایی هستند که دربارهٔ آن‌ها در بخش ۳.۱ توضیح دادیم. در برخی منابع، از عملگرهای min و max با نام عملگرهای استاندارد نام برده می‌شود. کوتاه یادآوری می‌کنیم که

اشتراک و اجتماع به‌صورت بالا، در قوانین دمورگان برای عملگر نفی $N(x) = ۱ - x$ صدق می‌کنند. هم‌چنین نسبت به یکدیگر توزیع‌پذیر بوده و خودتوان نیز هستند، ولی در قوانین شمول و طرد صدق نمی‌کنند. یک نکتهٔ جالب و مهم آن است که اندازه‌های min و max حالت‌های حدی $T-$ نرم‌ها و $S-$ نرم‌ها هستند. یعنی به‌ازای هر $T-$ نرم و هر $S-$ نرم

$$T(x,y) \leq \min(x,y)$$
$$S(x,y) \geq \max(x,y)$$

۲) ضرب جبری و جمع احتمالی

$$T_p(x,y) = x.y \quad , \quad S_p(x,y) = x + y - x.y$$

بر اساس نرم‌های بالا، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی چنین تعریف می‌شوند

$$(A \cap B)(x) = A(x).B(x)$$
$$(A \cup B)(x) = A(x) + B(x) - A(x).B(x)$$

این عملگرها، که ضرب جبری و جمع احتمالی نامیده می‌شوند، در هیچ‌یک از قوانین توزیع‌پذیری، خودتوانی، شمول و طرد صدق نمی‌کنند. این عملگرها در رده‌ای موسوم به عملگرهای اکیداً یکنوا قرار دارند یعنی عملگرهایی که شرط صعودی بودن را (به‌جای نانزولی بودن) در بند ۵ قضیه ۱.۳ دارند. برای توضیح بیشتر به [۵۰] مراجعه کنید.

۳) تفاضل کراندار و جمع کراندار

$$T_b(x,y) = \max(۰, x + y - ۱) \quad , \quad S_b(x,y) = \min(۱, x + y)$$

براساس این نرم‌ها، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند

$$(A \cap B)(x) = \max(۰, A(x) + B(x) - ۱)$$
$$(A \cup B)(x) = \min(۱, A(x) + B(x))$$

عملگرهای بالا، موسوم به تفاضل و جمع کراندار، در قوانین شمول و طرد صدق می‌کنند ولی نسبت به هم توزیع‌پذیر نیستند و خودتوان نیز نیستند. این عملگرها در رده‌ای موسوم به عملگرهای پوچ‌توان قرار دارند. توضیح بیشتر در این باره را می‌توانید در [۵۰] ببینید. نیز مرجع ۴۹ از hanss

چهار زوج عملگر بعد که معرفی می‌کنیم بر پایهٔ $T-$ نرم‌ها و $S-$ نرم‌های پارامتری تعریف شده‌اند. پارامتری‌سازی عملگرها توانایی آن‌ها را در سازگاری با شرائط مختلف بیشتر می‌کند.

۴) عملگرهای دراستیک

$$T_d(x,y)=\begin{cases} x & y=1 \\ y & x=1 \\ 0 & x,y\neq 1 \end{cases} \qquad S_d(x,y)=\begin{cases} x & y=0 \\ y & x=0 \\ 1 & x,y\neq 0 \end{cases}$$

برپایهٔ این نرم‌ها، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی چنین تعریف می‌شوند

$$(A\cap B)(x)=\begin{cases} \min(A(x),B(x)) & A(x)=1 \text{ یا } B(x)=1 \\ 0 & A(x) \text{ و } B(x)\neq 1 \end{cases}$$

$$(A\cup B)(x)=\begin{cases} \max(A(x),B(x)) & A(x)=0 \text{ یا } B(x)=0 \\ 1 & A(x) \text{ و } B(x)\neq 0 \end{cases}$$

عملگرهای دراستیک در قوانین شمول و طرد صدق می‌کنند، نسبت به هم توزیع‌پذیر نبوده و خودتوان نیستند. عملگرهای دراستیک حالت حدی عملگرهای T-نرم و S-نرم هستند، یعنی به‌ازای هر T-نرم و هر S-نرم

$$T_d(x,y)\leq T(x,y)$$
$$S_d(x,y)\geq S(x,y)$$

در برخی متون از نرم‌های دراستیک با عنوان ضعیف‌ترین T-نرم‌ها نام برده شده است. به‌ویژه T-نرم دراستیک را ضعیف‌ترین T-نرم (Weakest T-Norm) نیز نامیده‌اند. T-نرم دراستیک را، ضرب دراستیک و Sـنرم دراستیک را جمع دراستیک نیز می‌گویند [...]. ص ۳۱ کتاب Hanss . به کتاب دوبواپیراد ارجاع شود.

۵) عملگرهای هاماخر

$$T_\gamma(x,y)=\frac{x.y}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-x.y)},\ S_\gamma(x,y)=\frac{x+y-(2-\gamma)x.y}{1-(1-\gamma)x.y},\ \gamma\geq 0$$

براساس این نرم‌ها، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی این‌گونه تعریف می‌شوند ($\gamma\geq 0$)

$$(A\cap B)(x)=\frac{A(x).B(x)}{\gamma+(1-\gamma)(A(x)+B(x)-A(x).B(x))}$$

$$(A\cup B)(x)=\frac{A(x)+B(x)-(2-\gamma)A(x).B(x)}{1-(1-\gamma)A(x).B(x)}$$

تعاریف بالا برای اشتراک و اجتماع، توسط هاماخر و در زمینه‌ای متفاوت با شرایط قضیه ۱.۳ به‌دست آمده است (تمرین ۱۹.۳ را ببینید). دقت کنید که در حالت خاص $\gamma=1$، $T_\gamma(x,y)$ و $S_\gamma(x,y)$

به ضرب و جمع جبری تبدیل می‌شوند. عملگرهای هاماخر اکیداً یکنوا هستند. به‌علاوه این عملگرها ویژگی جبران‌پذیری دارند، در حالی‌که مثلاً عملگرهای max وmin فاقد این ویژگی‌اند. توضیح اینکه عملگر $*$ را جبران‌پذیر گوییم اگر چنانچه داشته باشیم $C = a * b$ آن‌گاه یک تغییر در a را بتوان با تغییری در b جبران کرد طوری‌که مقدار C تغییر نکند. این ویژگی به‌ویژه در برخی کاربردها مهم و سودمند است. برای ملاحظه بحث کلی به [۱۴۵] مراجعه کنید.

۶) عملگرهای ییگر

$$\begin{array}{ll} T_\omega(x,y) = ۱ - \min\{۱, [(۱-x)^\omega + (۱-y)^\omega]^{۱/\omega}\} & \omega \geq ۱ \\ S_\omega(x,y) = \min\{۱, (x^\omega + y^\omega)^{۱/\omega}\} & \omega \geq ۱ \end{array}$$

براساس این نرم‌ها، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی چنین تعریف می‌شوند ($w \geq ۱$)

$$\begin{aligned} (A \cap B)(x) &= ۱ - \min\{۱, [(۱-A(x))^w + (۱-B(x))^w]^{۱/w}\} \\ (A \cup B)(x) &= \min\{۱, [(A(x))^w + (B(x))^w]^{۱/w}\} \end{aligned}$$

این عملگرها، معرفی‌شده به‌وسیلهٔ ییگر [۸۶]، در قوانین شمول و طرد صدق نمی‌کنند، نسبت به هم توزیع‌پذیر نیستند و خودتوان هم نمی‌باشند. در حالت خاص وقتی $\omega \to \infty$، این عملگرها به عملگرهای min و max میل می‌کنند. به سخن دیگر

$$\begin{aligned} \lim_{\omega\to\infty} T_\omega(x,y) &= \min(x,y) \\ \lim_{\omega\to\infty} S_\omega(x,y) &= \max(x,y) \end{aligned}$$

هم‌چنین اگر $\omega = ۱$، تعاریف بالا بر تعاریف تفاضل کراندار و جمع کراندار منطبق می‌شوند.

۷) عملگرهای دوبوا و پراد

$$T_\alpha(x,y) = \frac{x.y}{\max\{x,y,\alpha\}} \qquad \alpha \in [۰,۱]$$

$$S_\alpha(x,y) = \frac{x+y-x.y-\min\{x,y,(۱-\alpha)\}}{\max\{(۱-x),(۱-y),\alpha\}} \qquad \alpha \in [۰,۱]$$

براساس این نرم‌ها، معرفی‌شده به‌وسیلهٔ دوبوا و پراد [۳۲]، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی

به‌صورت زیرتعریف می‌شوند ($\alpha \in I = [۰, ۱]$)

$$(A \cap B)(x) = \frac{A(x).B(x)}{\max\{A(x), B(x), \alpha\}}$$

$$(A \cup B)(x) = \frac{A(x) + B(x) - A(x).B(x) - \min\{A(x), B(x), ۱ - \alpha\}}{\max\{(۱ - A(x)), (۱ - B(x)), \alpha\}}$$

تعاریف بالا برای اشتراک و اجتماع، نسبت به هم توزیع‌پذیر نبوده و خودتوان نیز نیستند. این تعاریف در قوانین شمول و طرد نیز صدق نمی‌کنند.

$T-$ نرم فوق نسبت به پارامتر α نزولی است و مقدار آن همواره بین $\min(x, y)$ (وقتی $\alpha = ۰$) و ضرب جبری x و y یعنی $x.y$ (وقتی $\alpha = ۱$) قرار دارد. همچنین $S-$ نرم فوق نسبت به پارامتر α صعودی است و مقدار آن همواره بین $\max(x, y)$ (وقتی $\alpha = ۰$) و جمع احتمالی x و y یعنی $x + y - x.y$ (وقتی $\alpha = ۱$) قرار دارد. دقت کنید که چنانچه $x < \alpha < y$ یا $y < \alpha < x$، داریم $T_\alpha(x, y) = \min(x, y)$ و $S_\alpha(x, y) = \max(x, y)$.

۸) عملگرهای دومبی

$$T_\lambda(x, y) = \frac{۱}{۱ + [(\frac{۱}{x} - ۱)^\lambda + (\frac{۱}{y} - ۱)^\lambda]^{۱/\lambda}} \qquad \lambda \in (۰, \infty)$$

$$S_\lambda(x, y) = \frac{۱}{۱ + [(\frac{۱}{x} - ۱)^{-\lambda} + (\frac{۱}{y} - ۱)^{-\lambda}]^{-۱/\lambda}} \qquad \lambda \in (۰, \infty)$$

برپایهٔ این نرم‌ها، که دومبی معرفی کرده است [۳۷]، اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی به‌صورت زیر تعریف می‌شوند ($\lambda \in (۰, \infty)$)

$$(A \cap B)(x) = \frac{۱}{۱ + [(\frac{۱}{A(x)} - ۱)^\lambda + (\frac{۱}{B(x)} - ۱)^\lambda]^{۱/\lambda}}$$

$$(A \cup B)(x) = \frac{۱}{۱ + [(\frac{۱}{A(x)} - ۱)^{-\lambda} + (\frac{۱}{B(x)} - ۱)^{-\lambda}]^{-۱/\lambda}}$$

به‌منظور بررسی بیشتر دربارهٔ هشت عملگر بالا به کتاب [۴۵] مراجعه کنید.

مثال ۳.۵. به مثال ۹.۲ باز می‌گردیم. یک مجتمع مسکونی دارای آپارتمان‌هایی با تعداد اطاق از یک تا هفت است. بنابراین $X = \{۱, ۲, \ldots, ۷\}$ مجموعه انواع آپارتمان‌هاست که در آن $x \in X$ تعداد اطاق‌های یک آپارتمان است. اگر مجموعه‌های فازی A: «آپارتمان‌های مناسب خانواده ۴

نفره» و B: «آپارتمان‌های بزرگ» به‌صورت‌های زیر تعریف شوند

$$A=\{\frac{0.2}{1},\frac{0.5}{2},\frac{0.8}{3},\frac{1}{4},\frac{0.7}{5},\frac{0.3}{6},\frac{0.1}{7}\}$$

$$B=\{\frac{0.1}{2},\frac{0.3}{3},\frac{0.6}{4},\frac{0.7}{5},\frac{0.8}{6},\frac{1}{7}\}$$

آن‌گاه $A\cap B$ که بیانگر مجموعه فازی «آپارتمان‌های مناسب خانواده ۴ نفره و در عین حال بزرگ» است و $A\cup B$ که بیانگر مجموعه‌ی فازی «آپارتمان‌های مناسب خانواده ۴ نفره یا بزرگ» است، برحسب تعاریف مختلف برای اشتراک و اجتماع، این‌گونه خواهند بود.

۱) بر اساس عملگرهای min و max

$$A\cap B=\{\frac{0.1}{2},\frac{0.3}{3},\frac{0.6}{4},\frac{0.7}{5},\frac{0.3}{6},\frac{0.1}{7}\}$$

$$A\cup B=\{\frac{0.2}{1},\frac{0.5}{2},\frac{0.8}{3},\frac{1}{4},\frac{0.7}{5},\frac{0.8}{6},\frac{1}{7}\}$$

۲) بر اساس عملگرهای ضرب جبری و جمع احتمالی

$$A\cap B=\{\frac{0.05}{2},\frac{0.24}{3},\frac{0.6}{4},\frac{0.49}{5},\frac{0.24}{6},\frac{0.1}{7}\}$$

$$A\cup B=\{\frac{0.2}{1},\frac{0.55}{2},\frac{0.86}{3},\frac{1}{4},\frac{0.91}{5},\frac{0.86}{6},\frac{1}{7}\}$$

۳) براساس عملگرهای تفاضل كراندار و جمع كراندار

$$A\cap B=\{\frac{0}{2},\frac{0.1}{3},\frac{0.6}{4},\frac{0.4}{5},\frac{0.1}{6},\frac{0.1}{7}\}\ ,\ A\cup B=\{\frac{0.2}{1},\frac{0.6}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}\}$$

۴) بر اساس عملگرهای دراستیک

$$A\cap B=\{\frac{0.6}{4},\frac{0.1}{7}\}\ ,\ A\cup B=\{\frac{0.2}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\frac{1}{7}\}$$

۵) بر اساس عملگرهای هاماخر (با $\gamma=\frac{1}{2}$)

$$A\cap B=\{\frac{0.065}{2},\frac{0.26}{3},\frac{0.6}{4},\frac{0.51}{5},\frac{0.26}{6},\frac{0.1}{7}\}$$

$$A\cup B=\{\frac{0.2}{1},\frac{0.54}{2},\frac{0.84}{3},\frac{0.84}{3},\frac{1}{5},\frac{0.88}{5},\frac{0.84}{6},\frac{1}{7}\}$$

۶) بر اساس عملگرهای ییگر (با $\omega = ۲$)

$$A \cap B = \{\frac{۰}{۲}, \frac{۰٫۲۷}{۳}, \frac{۰٫۶}{۴}, \frac{۰٫۵۸}{۵}, \frac{۰٫۲۷}{۶}, \frac{۰٫۱}{۷}\}$$

$$A \cup B = \{\frac{۰٫۲}{۱}, \frac{۰٫۵۱}{۲}, \frac{۰٫۸۵}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰٫۹۹}{۵}, \frac{۰٫۸۵}{۶}, \frac{۱}{۷}\}$$

۷) بر اساس عملگرهای دوبوا و پراد (با $\alpha = ۰٫۸$)

$$A \cap B = \{\frac{۰٫۰۶}{۲}, \frac{۰٫۳}{۳}, \frac{۰٫۶}{۴}, \frac{۰٫۶۱}{۵}, \frac{۰٫۳}{۶}, \frac{۰٫۱}{۷}\}$$

$$A \cup B = \{\frac{۰٫۲}{۱}, \frac{۰٫۵}{۲}, \frac{۰٫۸۲}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰٫۸۹}{۵}, \frac{۰٫۸۲}{۶}, \frac{۱}{۷}\}$$

۸) بر اساس عملگرهای دومبی (با $\lambda = ۱$)

$$A \cap B = \{\frac{۰٫۰۹}{۲}, \frac{۰٫۲۸}{۳}, \frac{۰٫۶}{۴}, \frac{۰٫۵۴}{۵}, \frac{۰٫۲۸}{۶}, \frac{۰٫۱}{۷}\}$$

$$A \cup B = \{\frac{۰٫۲}{۱}, \frac{۰٫۵۹}{۲}, \frac{۰٫۸۲}{۳}, \frac{۱}{۴}, \frac{۰٫۸۲}{۵}, \frac{۰٫۸۲}{۶}, \frac{۱}{۷}\}$$

انتخاب عملگر مناسب

این موضوع که مناسب‌ترین عملگرها برای اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی کدام عملگرها هستند، از مسائل کلیدی در بررسی‌های نظری و کاربردی است. بی‌گمان انتخاب مناسب‌ترین عملگر به معیارهای کاربر باز می‌گردد. از لحاظ ریاضی و منطقی، داشتن یک پایهٔ اصل موضوعی (مانند قضیه‌های ۱.۳ تا ۳.۳) حائز اهمیت است. ولی از دید عملی نیز باید نکاتی را مانند سرعت محاسباتی، سازگاری با مقتضیات مسئله و برآورده شدن انتظارات کاربردی در نظر گرفت. برای مثال، در طراحی یک سیستم کنترل فازی، نکتهٔ مهم موفقیت سیستم در آزمون‌های تجربی و عملی است. در این موارد به‌کارگیری T-نرم‌ها و S-نرم‌هایی ترجیح دارد که منجر به عملکرد مورد انتظار برای سیستم شود.

۳.۳ نرم‌های مثلثی تعمیم‌یافته

باتوجه به ویژگی شرکت‌پذیری T–نرم‌ها، می‌توان تعریف $T-$ نرم را به n مؤلفه تعمیم داد [۶۹].

این تعریف بر پایهٔ رابطه‌ای بازگشتی و بر مبنای تعریف $T-$ نرم است.

تعریف ۳.۳ هر تابع n متغیره $T_n(x_1,\ldots,x_n) : I^n \to I$ را که به‌صورت زیر تعریف می‌شود، یک $T-$ نرم با n مؤلفه (یا $T-$نرم $n-$متغیره) گوییم

$$T_n(x_1,\ldots,x_n) = T[T_{n-1}(x_1,\ldots,x_{n-1}), x_n]$$

که $T(x_1,x_2)$، $T-$ نرم معمولی، یعنی $T-$ با دو مؤلفه، است.

دو قضیه زیر ویژگی‌های $T-$نرم تعمیم‌یافته را بیان می‌کند [۶۹]. ویژگی‌های ۱ تا ۴ در قضیه زیر متناظر با ویژگی‌های ۱ تا ۴ در تعریف ۱.۳ هستند.

قضیه ۴.۳ هر $T-$ نرم تعمیم‌یافته، در ویژگی‌های زیر صدق می‌کند

۱) بی اثر بودن عنصر ۱، یعنی

$$T_n(x_1,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n) = T_{n-1}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$$

۲) یکنوایی، یعنی اگر برای هر $\{1,\ldots,n\}$ $i' \in$ و i، $x_i \le x'_i$ آن‌گاه

$$T_n(x_1,\ldots,x_n) \le T_n(x'_i,\ldots,x'_n)$$

۳) جابه‌جایی تعمیم‌یافته، یعنی با هر جایگشت دیگری از x_i ها در$(x_1,\ldots,x_n)$، مقدار $T_n(x_1,\ldots,x_n)$ تغییر نمی‌کند.

۴) شرکت‌پذیری تعمیم‌یافته، یعنی

$$\begin{aligned} T_n(x_1,\ldots,x_n) &= T_{i+1}[x_1,\ldots,x_i,T_{n-i}(x_{i+1},\ldots,x_n)] \\ &= T_{n-j+1}[T_j(x_1,\ldots,x_j),x_{j+1},\ldots,x_n] \end{aligned}$$

قضیه ۵.۳ هر $T-$ نرم تعمیم‌یافته، در روابط زیر صدق می‌کند

۱) $$T(x_1,\ldots,x_n) \le \min(x_1,\ldots,x_n)$$

۲) $$T(x_1,\ldots,x_n) = 1 \Leftrightarrow \forall i \in \{1,\ldots,n\}, x_i = 1$$

۳) $$\exists i \in \{1,\ldots,n\}, x_i = 0 \Rightarrow T(x_1,\ldots,x_n) = 0$$

۴) $T(x_1, \ldots, x_n) \leq T(x_1, \ldots, x_{n-k}), 0 \leq k < n$

مثال ۶.۳. سه نمونه از $T-$نرم‌های تعمیم‌یافته، که هر یک تعمیمی از حالت دوبعدیِ متناظر هستند، عبارتند از

الف) $$T_n(x_1, \ldots, x_n) = \min(x_1, \ldots, x_n)$$

ب) $$T_n(x_1. \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n = \prod_{i=1}^{n} x_i$$

پ) $$T_n(x_1, \ldots, x_n) = \max(0, x_1 + x_2 + \cdots + x_n - n + 1)$$

همانند روند بالا، می‌توان $S-$نرم تعمیم‌یافته را تعریف کرد و ویژگی‌های آن را به‌دست آورد. نرم‌های مثلثی تعمیم‌یافته در استدلال تقریبی کاربرد دارند (ر.ک. فصل ۱۰).

۴.۳ دربارهٔ عملگر متمم، ویژگی‌ها و جانشین‌های آن

در بخش ۱.۲ تعریف متمم یک مجموعه فازی مانند A برپایهٔ عملگر نفی $C(x) = 1 - x$ و به‌صورت مجموعه فازی A^c با تابع عضویت زیر تعریف شد

$$A^c(x) = 1 - A(x), \quad \forall x \in X$$

توجیه منطقی این تعریف برای متمم یک مجموعه فازی، دشوارتر از توجیه منطقی تعاریف اشتراک و اجتماع برپایهٔ عملگرهای max و min است (کاری که در قضیه ۱.۳ انجام شد).

به‌منظور یافتن عملگر متمم مناسب، ابتدا شرایطی معقول و منطقی را صورت‌بندی می‌کنیم که یک عملگر مطلوب برای متمم باید در آن‌ها صدق کند و سپس به دنبال راه‌هایی برای به‌دست آوردن یا ساختن عملگر مناسب باشیم [۲۳] و [۴۴].

در حالت کلی هر عملگر متمم باید به‌صورت یک تابع مانند $C : I \to I$ باشد، طوری‌که متمم هر مجموعه فازی بر اساس آن تابع (و فقط بر اساس آن) به‌صورت زیر تعریف شود

$$A^c(x) = C[A(x)]$$

به‌طور شهودی و منطقی می‌توانیم چهار شرط (/ محدودیت) زیر را برای تابع C قائل شویم:

۱) شرائط مرزی $C(0) = 1$ و $C(1) = 0$

۲) یکنوایی $x_1 \leq x_2 \Rightarrow C(x_1) \geq C(x_2)$

۳) پیوستگی

۴) برگشت‌پذیری $C[C(x)] = x$

شرط اول به این دلیل فرض می‌شود که عملگر C در حالت حدّی منطبق برعملگر متمم معمولی شود. شرط دوم به این دلیل است که مسلماً وقتی درجه عضویت x در مجموعه فازی A افزایش یابد، درجه عضویت آن در متمم مجموعه فازی A کاهش می‌یابد (دست‌کم افزایش نمی‌یابد). شرط سوم به این دلیل است که اگر درجهٔ عضویت x در مجموعه فازی A اندکی افزایش یابد، درجه عضویت x در متمم A کاهش زیاد نداشته باشد. شرط چهارم به این دلیل است که، به بیان منطقی، دو بار نفیِ یک گزاره، به گزاره‌ای هم‌ارز با گزارهٔ اول منجر می‌شود.

ولی این چهار شرط، تابع C را به‌طور یکتا معین نمی‌کنند. حتی اگر شرط $C(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ را به چهار شرط بالا اضافه کنیم باز هم C به‌طور یکتا معین نمی‌شود. ولی می‌توان شرط دیگری را به مجموعه شرایط ۱ تا ۴ اضافه کنیم تا تابع C به‌صورت منحصر به فرد $C(x) = 1 - x$ به‌دست آید. به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۶.۳ فرض کنید تابع $C : I \to I$ در شرایط ۱ تا ۴ بالا، و هم‌چنین در شرط زیر صدق کند

۵) $$x_1 - x_2 = C(x_2) - C(x_1)$$

آن‌گاه به‌طور یکتا $C(x) = 1 - x$.

دقت کنید که شرط ۵ بدین معنی است که

$$A(x_1) - A(x_2) = A^c(x_2) - A^c(x_1)$$

یعنی تغییری در مقدار عضویت در مجموعه فازی A، دقیقاً همان مقدار تغییر را در مقدار عضویت آن عنصر در متمم مجموعه فازی A ایجاد کند. روشن است که این شرط شرطی قوی است و چندان بدیهی به‌نظر نمی‌رسد. وضعیت‌هایی وجود دارند که برای آن‌ها مقداری افزایش در درجه عضویت یک عنصر در یک مجموعه فازی، لزوماً همان مقدار کاهش را برای عضویت آن عنصر در متمم مجموعه فازی، نتیجه نمی‌دهد.

پیشنهاد دیگر، افزودن شرط دیگری به‌جای شرط ۵ به مجموعه شرایط ۱ تا ۴ است، تا تابع C

به‌صورت $C(x) = ۱ - x$ به‌دست آید. به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه ۷.۳ فرض کنید تابع $C : I \to I$ در شرایط ۱ تا ۳ بالا و شرط زیر صدق کند

$$x_۱ + x_۲ = ۱ \Rightarrow C(x_۱) + C(x_۲) = ۱ \qquad (۶$$

آن‌گاه به‌طور یگانه $C(x) = ۱ - x$.

دقت کنید که شرط ۶ بدین معنی است که

$$A(x_۱) + A(x_۲) = ۱ \Rightarrow A^c(x_۱) + A^c(x_۲) = ۱$$

گرچه شرط ۶ ضعیف‌تر از شرط ۵ است، باز هم وضعیت‌هایی وجود دارند که برقراری این شرط نیز برای آن‌ها ضروری نمی‌نماید.

بر پایهٔ بحث بالا، می‌توان گفت که تعیین یک تابع مناسب برای تعریف متمم، تنها با شرایط ۱ تا ۴ غیر ممکن است و برای به‌دست آوردن عملگر متداول $C(x) = ۱ - x$ باید به این شرایط شرطی را بیافزاییم.

گذشته از مباحث بالا، باید گفت که عملگر $C(x) = ۱ - x$ در بسیاری از زمینه‌های نظری و کاربردی عملگر مناسبی دارد.

قضیه زیر، که اثبات آن‌را به خواننده واگذار می‌کنیم، نشان می‌دهد با به‌کارگیری عملگر $C(x) = ۱ - x$، قوانین دمورگان، با استفاده از هر زوج $T-$ نرم و $S-$ نرم دوگان، برقرار هستند.

قضیه ۸.۳ چنانچه برای متمم از عملگر $C(x) = ۱ - x$ استفاده شود، هر زوج $T-$ نرم و $S-$ نرم دوگان در قوانین دمورگان صدق می‌کنند.

یک روش دیگر برای تعریف عملگر متمم، به‌کارگیری عملگرهای پارامتری است. در ادامه به دو ردهٔ مهم عملگرهای پارامتری متمم اشاره می‌کنیم.

تعریف ۴.۳ λ-متمم سوگینوی مجموعه فازی A، به‌صورت مجموعه فازی با تابع عضویت

زیر تعریف می‌شود

$$A^c_\lambda(x) = \frac{1 - A(x)}{1 + \lambda A(x)}, \qquad \lambda \in (-1, \infty)$$

دقت کنید که این تعریف، در شرایط ۱ تا ۳ صدق می‌کند و به‌ازای $\lambda = 0$ منطبق بر تعریف معمولی متمم می‌شود.

تعریف ۵.۳ ω-متمم ییگر مجموعه فازی A، به‌صورت مجموعه فازی با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$A^c_\omega(x) = [1 - (A(x))^\omega]^{1/\omega}, \qquad \omega \in (0, \infty)$$

عملگر ییگر نیز در شرایط ۱ تا ۳ صدق می‌کند. این تعریف به‌ازای $\omega = 1$ منطبق بر تعریف معمولی متمم می‌شود.

نکتهٔ دیگر دربارهٔ عملگر متمم ییگر آن است که اگر از این عملگر برای متمم استفاده شود، آن‌گاه عملگر اجتماع ییگر در قانون شمول صدق می‌کند (تمرین ۲۰.۳). یعنی، به‌ازای هر $\omega \in (0, \infty)$،

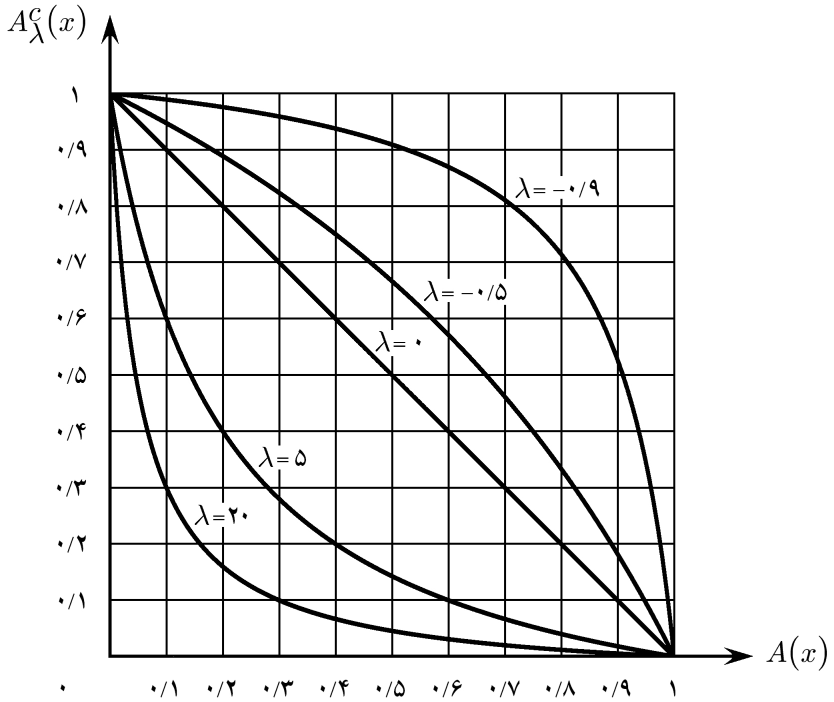
$$A \cup A^c_\omega = X$$

قضیه زیر، که اثبات آن را به خواننده واگذار می‌کنیم، برقرار بودن قوانین دورگان را برای عملگرهای متمم ییگر بیان می‌کند.

قضیه ۹.۳ فرض کنید برای اشتراک و اجتماع از عملگرهای استاندارد استفاده شود. در این صورت با به‌کارگیری الف) $\lambda-$ متمم سوگینو، ب) $\omega-$ متمم ییگر؛ قوانین دمورگان برقرار هستند.

در شکل‌های ۱.۳ و ۲.۳ نمودار عملگرهای متمم سوگینو و ییگر به‌ازای چند مقدار λ و ω رسم شده‌اند.

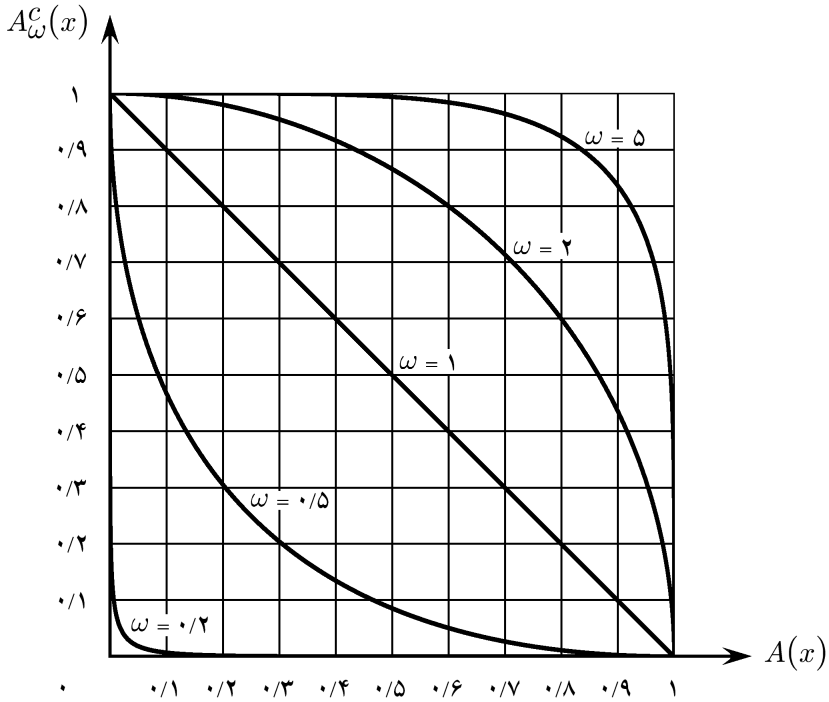
نکته ۳.۳ پیشتر گفتیم که در زمینهٔ مجموعه‌های فازی قوانین شمول و طرد یعنی $A \cup A^c = X$ و $A \cap A^c = \phi$ برقرار نیستند. این موضوع به تعریف اجتماع و اشتراک باز می‌گردد و نه به تعریف متمم. زیرا در بخش پیشین دیدیم که می‌توان اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی را



شکل ۱.۳ رفتار متمم سوگینو به‌ازای چند مقدار λ.

چنان تعریف کرد که قوانین شمول و طرد برقرار باشند (البته با از دست دادن قوانین توزیع‌پذیری و خودتوانی.)

نکته ۴.۳ (نقطهٔ تعادل) یک ویژگی مرتبط با هر عملگر متمم مانند C، نقطهٔ تعادل است، یعنی نقطه‌ای که $C(x) = x$. به سخن دیگر، نقطهٔ تعادل، نقطه‌ای است که در آن نقطه درجهٔ عضویت در A^C برابر با درجهٔ عضویت در A است: $A^C(x) = A(x)$. ثابت می‌شود که هر تابع متمم حداکثر یک نقطهٔ تعادل دارد و این‌که هر تابع متمم پیوسته یک و تنها یک نقطهٔ تعادل دارد [۴۹].



شکل ۲.۳ رفتار متمم ییگر به‌ازای چند مقدار ω.

۵.۳ نکته‌های تکمیلی

۱ - عملگرهای انبوهش

تعریف اشتراک و اجتماع دو مجموعه فازی بر پایهٔ عملگرهای min و max تعریف‌هایی هستند که زاده در نخستین مقالهٔ خود «مجموعه‌های فازی» [۸۹] برای اشتراک و اجتماع مطرح کرد. پس ار معرفی مجموعه‌های فازی، عملگرهای گوناگونی برای اشتراک و اجتماع معرفی شدند که مهم‌ترین آن‌ها را در بخش ۱.۳ مرور کردیم.

گفتنی است که اشتراک و اجتماع تنها روش‌های انبوهش دو مجموعه فازی نیستند. شیوه‌های دیگری نیز برای انبوهش دو مجموعه فازی پیشنهاد شده‌اند. یک شیوه، به‌کارگیری عملگرهای میانگین (مانند میانگین حسابی و میانگین هندسی) است، که به‌ویژه در مباحث مربوط به تصمیم‌گیری

در محیط فازی کاربرد دارند. این عملگرها در کتاب کلیر–یوان به‌خوبی بیان شده‌اند. همچنین، [۳۶] متن مروری مناسبی دربارهٔ عملگرهای میانگین است. شیوهٔ دیگر، تلفیق عملگرهای میانگین و عملگرهای مربوط به اشتراک و اجتماع است که منجر به تعریف عملگرهایی موسوم به «و فازی» و «یا فازی» شده است []. دو گزارش دقیق و گسترده دربارهٔ بررسی و مقایسهٔ انواع عملگرهای انبوهش فازی، [۳۳] و [۵۷] هستند. مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ انواع عملگرهای انبوهش، و برخی مراجع در این باره، را می‌توان در [۴۹] پیگیری کرد.

۲- نرم‌های مثلثی

نرم‌های مثلثی نخستین بار به‌وسیلهٔ منگر در سال ۱۹۴۲، در بستر فضاهای متریک آماری، معرفی شد [۵۶]. اشوارتس و اسکلار در دههٔ ۱۹۶۰ م. طی چند مقاله و سپس یک کتاب [۷۴] به این موضوع پرداختند. پس از معرفی مجموعه‌های فازی، به موضوع T–نرم‌ها و S–نرم‌ها، به‌عنوان یک موضوع محوری و پایه‌ای، توجه بیشتر و جدی‌تری شد.

دربارهٔ T–نرم‌ها و S–نرم‌ها و مباحثی مانند ویژگی‌های آن‌ها، کاربرد آن‌ها و انواع مختلف پارامتری و ناپارامتری آن‌ها، چند کتاب و بسیاری مقاله نگاشته شده است. مرجع اصلی و جامع کتاب کلمنت و همکاران [۴۵] است (مقالات کتاب [۴۶] نیز شایان توجه هستند). ساختارهای جبری و منطقی مبتنی بر / مرتبط با این عملگرها در کتاب گوین و واکر [۶۲] به‌گستردگی بحث شده است (نیز را [۶۳] ببینید). تحلیل حساسیت این عملگرها در [۶۲] و [۶۵] بررسی شده است.

نوواک مفاهیم ضرب‌نما و همضرب‌نما (که مفاهیمی کلی‌تر از T–نرم و S–نرم هستند) به‌ترتیب به‌جای مفاهیم T–نرم و S–نرم در نظر گرفته است [۶۴].

۳- توابع مولد و قضیه‌های مشخصه‌سازی

آیا می‌توان نرم‌های مثلثی را الگوریتم‌وار تولید کرد؟ آیا می‌توان با الگویی مشخص، نرم‌های مثلثی با ویژگی‌هایی خاص تولید کرد؟ پاسخ هر دو پرسش مثبت است. این الگوها توابع مولد نام دارند. برپایهٔ توابع مولد، افزون بر تولید نرم‌های مثلثی، قضیه‌هایی دربارهٔ مشخصه‌سازی نرم‌های مثلثی نیز بیان شده است. این دو مبحث، یعنی توابع مولد و قضیه‌های مشخصه‌سازی، دربارهٔ هم‌نرم‌های

مثلثی و همچنین دربارهٔ عملگرهای متمم نیز مطرح است. در کتاب نواک و همکاران [۶۳] و کتاب کلیر و یوان [۴۹] این دو مبحث به‌خوبی بیان شده‌اند. **کاپولا**

۴- برای مطالعهٔ بیشتر

مطالعهٔ بیشتر دربارهٔ **عملگر متمم** (از دیدگاه منطقی: عملگر نفی) را می‌توان در کتاب‌های کلیر و فولگر [۴۸] و پدریچ و یوان [۶۵] دنبال کرد. کتاب کلیر و یوان [۴۹] حاوی برخی قضایای مشخصه‌سازی دربارهٔ عملگر متمم است. در کتاب گوین و واکر [۶۲] نیز عملگر متمم در چارچوب مباحث جبری بررسی شده است.

پرسش‌ها

۱.۳ از دید شما، کدام‌یک از شرایط هفت‌گانه در قضیهٔ بلمن-یرتس، بدیهی نیست؟ (البته اگر شرط یا شرایطی را بدیهی نمی‌دانید.)

۲.۳ تلاش کنید که یک T-نرم، به‌جز آنها که در متن کتاب آمده است، تعریف کنید. سپس، ویژگی‌های T-نرمی را که معرفی کرده‌اید، بررسی کنید.

۳.۳ از دید کاربردی، برقرار نبودن شرط $A^c(x) = ۱ - A(x)$ (یعنی $A(x) + A^c(x) < ۱$ یا $A(x) + A^c(x) > ۱$) در چه وضعیت‌هایی رخ می‌دهد؟

تمرین‌ها

۱.۳ با چهار مثال نشان دهید که شرایط قضیه ۳.۳ مستقل از هم‌اند.

۲.۳ فرض کنید $X = \{۰, ۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$، و A مجموعه فازی «اعداد کوچک»، و B مجموعه فازی «اعداد تقریباً ۵» با توابع عضویت زیر باشند

$$A = \{\frac{۱}{۰}, \frac{۰/۸}{۱}, \frac{۰/۶}{۲}, \frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۲}{۴}, \frac{۰/۰۵}{۵}, \}$$

$$B = \{\frac{۰/۲}{۲}, \frac{۰/۴}{۳}, \frac{۰/۷}{۴}, \frac{۱}{۵}, \frac{۰/۷}{۶}, \frac{۰/۴}{۷}, \frac{۰/۲}{۸}\}$$

$A \cap B$ و $A \cup B$ را بر پایهٔ هشت تعریفی که برای اشتراک و اجتماع در این فصل گفتیم بیابید. در استفاده از عملگرهای هاماخر از $\gamma = ۰/۲$، عملگرهای ییگر از $\omega = ۳$، عملگرهای دوبوا و پراد از $\alpha = ۰/۵$ و در به‌کارگیری عملگرهای دومبی از $\lambda = ۲$ استفاده کنید.

۳.۳ با مفروضات تمرین ۲.۳، $A \cap B$ و $A \cup B$ را بر اساس عملگرهای هاماخر به‌ازای چند γ بیابید. نتایج را در دو جدول جداگانه خلاصه کنید و تأثیر تغییر γ را بررسی کنید.

۴.۳ تمرین ۳.۳ را بر اساس عملگرهای ییگر و به‌ازای چند ω انجام دهید.

۵.۳ تمرین ۳.۳ را بر اساس عملگرهای دوبوا و پراد و به‌ازای چند α انجام دهید.

۶.۳ تمرین ۳.۳ را بر پایهٔ عملگرهای دومبی و به‌ازای چند λ انجام دهید.

۷.۳ بر اساس نتایج تمرین ۲.۳، بررسی کنید که عملگرهای پوچ‌توان (تفاضل کراندار و جمع کراندار) در قوانین شمول و طرد صدق می‌کنند، ولی خودتوان نیستند. همچنین، با در نظر گرفتن مجموعه فازی

دیگری مانند C، بررسی کنید که این عملگرها در قوانین توزیع‌پذیری صدق نمی‌کنند.

۸.۳ دو مجموعه فازی A (حدود صفر) و B (حدود ده) را با توابع عضویت زیر در نظر بگیرید

$$A(x)=\begin{cases}\dfrac{10+x}{10} & -10\le x<0\\ \dfrac{10-x}{10} & 0\le x<10\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}\qquad B(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{10} & 0\le x<10\\ \dfrac{20-x}{10} & 10\le x<20\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

$A\cap B$ و $A\cup B$ را بر پایهٔ عملگرهای پوچ‌توان بیابید، و نمودار توابع عضویت آن‌ها را رسم کنید.

۹.۳ در سامانهٔ کنترل یک خودرو، سرعت کم و سرعت متوسط به‌وسیلهٔ دو مجموعه فازی L و M با توابع عضویت زیر تعریف شده‌اند

$$L(v)=\begin{cases}1 & 0\le v<30\\ \dfrac{60-v}{30} & 30\le v<60\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}\qquad M(v)=\begin{cases}\dfrac{v-30}{30} & 30\le v<60\\ \dfrac{90-v}{30} & 60\le v<90\\ 0 & \text{جاهای دیگر}\end{cases}$$

تابع عضویت $L\cup M$ (سرعت کم یا متوسط) را بر پایهٔ چهار عملگر ماکزیمم، جمع احتمالی، جمع کراندار و دراستیک بیابید، و نمودار توابع عضویت حاصل را رسم کنید.

۱۰.۳ با مفروضات تمرین ۲.۳، A^c_λ را به‌ازای $\lambda=-0/5$ و $\lambda=10$ بیابید و با هم مقایسه کنید.

۱۱.۳ گیریم $X=[0,10]$ و $A(x)=\frac{1}{2},\forall x\in X$. مجموعه فازی $A^c_\lambda(x)$ را به‌ازای $\lambda=1$ بیابید.

۱۲.۳ فرض کنید $X=[0,1]$ و $A(x)=\dfrac{1-x}{1+x},\forall x\in X$. مجموعه فازی $A^c_\lambda(x)$ را به‌ازای $\lambda=1$ بیابید. نمودار $A(x)$ و $A^c_{\lambda=1}(x)$ را، در یک دستگاه، رسم کنید.

۱۳.۳ بررسی کنید که در تعریف A^c_λ، اگر $\lambda<0$ آن‌گاه همواره $A(x)+A^c\lambda(x)>1$، یعنی مجموع مقادیر عضویت هر x دلخواه در یک مجموعه و $\lambda-$متمم آن مجموعه از یک بیشتر است. و چنانچه $\lambda>0$، همواره $A(x)+A^c\lambda(x)<1$، یعنی مجموع مقادیر عضویت هر x دلخواه در یک مجموعه و $\lambda-$متمم آن مجموعه از یک کمتر است.

۱۴.۳ فرض کنید $X=[0,1]$ و $A(x)=x,\forall x\in X$ و $B(x)=\frac{1}{2}$. مجموعه‌های فازی $A\cap B$ و $A\cup B$ را بر پایهٔ عملگرهای اکیداً یکنوا (با $\gamma=2$) بیابید. نمودارهای توابع عضویت مجموعه‌های فازی A و B و $A\cap B$ و $A\cup B$ را در یک دستگاه رسم کنید.

۱۵.۳ با مفروضات تمرین ۱۴.۳، $A\cap B$ و $A\cup B$ را با به‌کارگیری عملگرهای دوبوا و پراد با $\alpha=\frac{1}{3}$ بیابید. نمودارهای توابع عضویت A و B و $A\cap B$ و $A\cup B$ را رسم کنید.

۱۶.۳ الف) بررسی کنید که آیا تابع

$$C(x)=\frac{1}{2}\{1+Sin((2x+1)\frac{\pi}{2})\}$$

در شرایط چهارگانهٔ عملگر نفی صدق می‌کند؟

ب) یک تابع مناسب دیگر برای عملگر نفی، به‌جز مواردی که در این فصل اشاره شد، مثال بزنید؛ یعنی تابعی یک‌متغیره از I به I که در شرائط چهارگانهٔ عملگر نفی صدق کند.

۱۷.۳ ثابت کنید که نرم‌های $\min$ و $\max$ به‌ترتیب حالت‌های حدی $T-$نرم‌ها و $S-$نرم‌ها هستند. یعنی دربارهٔ هر $T-$نرم و هر $S-$نرم

$$T(x,y) \leq T_m(x,y)$$
$$S(x,y) \geq S_m(x,y)$$

۱۸.۳ ثابت کنید T-نرم دراستیک و S-نرم دراستیک، به‌ترتیب حالت حدی T-نرم‌ها و S-نرم‌ها هستند. یعنی هر T-نرم و هر S-نرم را که در نظر بگیریم، به‌ازای هر $x,y \in [\circ,\text{۱}]$

$$T_d(x,y) \leq T(x,y)$$
$$S_d(x,y) \geq S(x,y)$$

۱۹.۳ ثابت کنید که عملگرهای اشتراک و اجتماع هاماخر، برحسب هر مؤلفه، یک‌به‌یک اند. یعنی

$$A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C \quad \text{و} \quad A \cup B = A \cup C \Rightarrow B = C$$

(و در نتیجه)

$$A \cap B = C \cap B \Rightarrow A = C \quad \text{و} \quad A \cup B = C \cup B \Rightarrow A = C$$

این شرائط که می‌توان آنها را بدیل شرط ۳ (توزیع‌پذیری) در قضیه ۱.۳ دانست، تفاوت رهیافت هاماخر را با رهیافت بلمن - یرتس در تعریف اشتراک و اجتماع نشان می‌دهد.

۲۰.۳ بررسی کنید که با استفاده از $\omega-$ متمم ییگر، عملگر اجتماع ییگر در قانون شمول صدق می‌کند.

۲۱.۳ **(تنها $T-$نرم خودتوان)** ثابت کنید تنها $T-$نرم که ویژگی خودتوانی دارد، عبارت است از $T_m(x,y) = \min\{x,y\}$. همچنین تنها $S-$نرم که این ویژگی را دارد $S_m(x,y) = \max\{x,y\}$ است.

۲۲.۳ بررسی کنید که

الف) برای هر $T-$نرم، $T(x,\circ) = \circ, \forall x \in I$،

ب) دربارهٔ هر $S-$نرم، $S(x,\text{۱}) = \text{۱}, \forall x \in I$.

۲۳.۳ فرض کنید T، T-نرمی با ویژگی زیر است

$$T(x,y+z) = T(x,y) + T(x,z),\ x,y,z \in [\circ,\text{۱}], y+z \leq \text{۱}$$

ثابت کنید که T ضرب جبری است.

۲۴.۳ بررسی کنید که متمم سوگینو در شرط ۴ مربوط به عملگرهای متمم، یعنی برگشت‌پذیری، صدق می‌کند.

۲۵.۳ **(دربارهٔ نقطهٔ تعادل)** الف) نقطهٔ تعادل عملگرهای متمم سوگینو را بیابید.

ب) نقطهٔ تعادل عملگرهای متمم ییگر را بیابید.

پ) ثابت کنید که هر متمم فازی با شرایط ۱ و ۲ (شرایط مرزی و یکنوایی) حداکثر یک نقطهٔ تعادل دارد، و هر متمم فازی با شرایط ۱ و ۲ و ۳ (شرط پیوستگی) یک و تنها یک نقطهٔ تعادل دارد.

۲۶.۳ تمرین برای رسم نمودار توابع ماکز و مین مانند تمرین ۳.۴ و تمرین کاربردی؟