هدف در مدل مارکویتز، چگونگی تخصیص دارایی‌ها می‌باشد تا بتوانیم به حداکثر مطلوبیت دست یابیم.

مدل مارکویتز بر پایه مشخصه‌های بازده منتظره و ریسک اوراق بهادار بنا شده و در یک چارچوب نظری برای تحلیل گزینه‌های ریسک و بازده است. مدل میانگین - واریانس مارکویتز مشهورترین و متداول‌ترین رویکرد در مسئله انتخاب سبد بهینه می‌باشد.

اگر سرمایه‌گذار، مقداری پول برای سرمایه‌گذاری در n سهم داشته باشد، سوالی که پیش می‌آید این است «مبلغ سرمایه‌گذاری چگونه بین n ورقه، تخصیص یابد تا به‌طوری حداکثر مطلوبیت مورد انتظار را داشته باشد؟» مارکویتز پیشنهاد می‌کند که پاسخ مسئله فوق بایستی در دو مرحله زیر انجام پذیرد:

۱- تعیین مجموعه پرتفوی کارا. پرتفوی کارا، به پورتفویی می‌گویند که با توجه به ریسک معین، دارای بازده مورد انتظار بیشتری باشد و یا در سطح بازده معین، ریسک آن حداقل باشد.

۲- انتخاب از مجموعه کارا، یعنی انتخاب پرتفویی که مناسب‌ترین ترکیب ریسک و بازده را برای سرمایه‌گذار فراهم می‌نماید.

۱۳-۲ حالت اول، بررسی منحنی مرز کارا برای دارایی‌های ریسکی

فرض کنید سبدی متشکل از دو دارایی داریم که w_i وزن هر دارایی، σ_i انحراف معیار بازده دارایی iام و r_i میانگین بازده تاریخی دارایی iام می‌باشد. بنابراین بازده سبد برابر است با:

$$r_p = w_1 . r_1 + w_2 . r_2$$

برای محاسبه ریسک سبد، ابتدا باید واریانس بازده سبد را بدست آوریم.

$$var(r_p) = var(w_1 . r_1 + w_2 . r_2) = w_1^2 . \sigma_1^2 + w_2^2 . \sigma_2^2 + 2\, w_1 . w_1 . cov(1,2)$$

به وضوح مشاهده می‌شود که برای محاسبه واریانس سبد با تعداد سهام بالاتر، رابطه طولانی‌تری خواهیم داشت.

بنابراین در محاسبات مربوط به سبد، از ماتریس‌ها استفاده می‌کنیم.

۱۳-۲-۱ ماتریس واریانس - کواریانس

ماتریس واریانس- کواریانس، ماتریسی است که درایه‌های آن کواریانس بین بازده سهام را نشان می‌دهد.

برای دو دارایی، این ماتریس به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} cov(1,1) & cov(1,2) \\ cov(2,1) & cov(2,2) \end{bmatrix}$$

با توجه به اینکه $cov(i,i) = var(i)$ و $cov(i,j) = cov(j,i)$ بنابراین

$$\begin{vmatrix} var(1) & cov(1,2) \\ cov(1,2) & var(2) \end{vmatrix}$$

ماتریس مربوط به وزن های دارایی‌ها را w می‌نامیم که به طور پیش فرض یک ماتریس ستونی می‌باشد

$$w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

ترانهاده ماتریس

$$ww^T = (w_1, w_2)$$

بنابراین می‌توانیم رابطه ماتریس سبد را به صورت ماتریس زیر بنویسیم

$$\sigma_p^2 = (w_1, w_2).\begin{pmatrix} var(1) & cov(1,2) \\ cov(1,2) & var(2) \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

ماتریس واریانس کواریانس را $\sum$ می‌نامیم. بنابراین:

$$\sigma_p^2 = w^T.\sum.w$$

۲-۲-۱۴ مزیت استفاده از ماتریس‌ها

✓ ساده کردن رابطه‌ی طولانی واریانس.

✓ به عنوان مثال در صورتی که ۱۰ دارایی داشته باشیم، روش جبری آن چندین خط خواهد شد. در صورتی که فرم ماتریسی آن برای n دارایی مطابق زیرمی باشد:

$$w^n = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ . \\ w_n \end{pmatrix} \sum = \begin{bmatrix} cov(1,1) & cov(1,2) & \dots & cov(1,n) \\ cov(2,1) & cov(2,2) & \dots & cov(2,n) \\ . & & & . \\ . & & & . \\ . & & & . \\ cov(n,1) & cov(n,2) & \dots & cov(n,n) \end{bmatrix}$$

✓ با توجه به آنکه برنامه اکسل بر مبنای ماتریس‌ها بنا شده است، محاسبات بهینه‌سازی سبد به صورت ماتریسی بسیار راحت‌تر خواهد بود.

همانطور که می‌دانیم تئوری مارکویتز و منحنی مرز کارای آن براساس دو مبنای زیر می‌باشد

۱- در بین تمامی سبدهای با بازده یکسان، کمترین ریسک یا واریانس را داشته باشد.

۲- در بین تمامی سبدهای با ریسک یا واریانس یکسان، بیشترین بازدهی را داشته باشد

بنابراین باید یکی از ۲ حالت فوق را به عنوان مدل انتخاب کنیم و فرآیند بهینه‌سازی را انجام دهیم

در نقطه B ریسک را حداکثر می کنیم، سطح بازده مهم نیست چراکه هدف در نقطه B این است که بیشتری مقدار ریسک و بازده را داشته باشیم بنابراین مدل بهینه‌سازی در این نقطه به صورت زیر خواهد شد

$$\max w^T . \sum . w$$

$$\begin{aligned} & s.t: \\ & w^T 1 = 1 \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

برای سایر نقاط به ازاء بازده مشخص بین بازده A و بازده B، ریسک را حداقل می‌کنیم تا وزن‌های بهینه این نقاط جهت رسم منحنی بدست آید. مدل کلی سایر نقاط به صورت زیر می‌باشد:

$$\min w^T . \sum . w$$

$$\begin{aligned} & s.t: \qquad R_A < \bar{R} < R_B \\ & w^T R = \bar{R} \\ & w^T 1 = 1 \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

مثال: داده‌های مربوط به سه دارایی A، B و C را در نظر بگیرید. دارایی A یک دارایی با ریسک بالا، دارایی B یک دارایی با ریسک متوسط و دارایی C یک دارایی با ریسک کم می‌باشد. می‌خواهیم سبدهای بهینه مربوط به این سه دارایی را تشکیل دهیم.

فرضیات:

۱. در این مثال فرض کرده‌ایم کلیه دارایی‌ها ریسکی هستند و دارایی بدون ریسک نداریم.

$w \geq 0$

۲. سرمایه‌گذار نه وام می‌دهد (پولش را در بانک سرمایه‌گذاری کند) نه وام می‌گیرد (از بانک وام می‌گیرد.)

۱۳-۲-۳ رسم منحنی

همانطور که قبلا گفته شد، به منظور رسم منحنی برای نقاط min Risk و max Risk یک مدل و برای سایر نقاط یک مدل کامل تر را ارائه نموده‌ایم. بنابراین رسم منحنی شامل دو بخش است:

بخش ۱. یافتن نقاط بهینه min Risk و max Risk

بخش ۲. یافتن حداقل چهار نقطه بین نقاط min و max جهت رسم منحنی مرز کارا

بخش ۱ :یافتن نقاط بهینه min Risk و max Risk

مدل مربوط در این بخش برای نقاط min و max به صورت زیر است

$$\max(\min)\, w^T . \sum . w$$
$$s.t:$$
$$w^T . 1 = 1$$
$$w \geq 0$$

با توجه به آنکه در این مثال سه دارایی داریم، بنابراین بردار w یک بردار با سه درایه به صورت ستونی خواهد بود. فایل portfolio کاربرگ efficient frontier را در نظر بگیرید (شکل ۲-۱۳)

	A	B	C	D
1		price		
2	Year	A	B	C
3	1960	20.255	262.935	100.000
4	1961	25.686	268.730	102.330
5	1962	23.430	284.090	105.330
6	1963	28.746	289.162	108.890
7	1964	33.448	299.894	113.080
8	1965	37.581	302.695	117.970
9	1966	33.784	318.197	124.340
10	1967	41.873	309.103	129.940
11	1968	46.480	316.051	137.770
12	1969	42.545	298.249	150.120
13	1970	44.221	354.671	157.480

شکل ۲-۱۳ اطلاعات مربوط به سه دارایی

این اطلاعات از جنس قیمت هستند. بنابراین باید آنها را تبدیل به بازده کنیم. در سلول F4 فرمول بازدهی سال ۱۹۶۱برای دارایی A را به صورت زیر نویسیم:

$$= (B4 - B3)/B3$$

سلول F4 را تا H4 درگ می‌کنیم تا بازدهی هر دارایی در طول سال ۱۹۶۱ بدست اید سپس تا ردیف ۴۶ درگ می‌کنیم تا بازده همه دارایی‌ها در تمامی سال‌ها بدست اید. (شکل ۳-۱۳)

	E	F	G	H	I
1					
2					
3		ra	rb	rc	
4		0.2681	0.022	0.0233	
5		-0.088	0.0572	0.0293	
6		0.2269	0.0179	0.0338	
7		0.1636	0.0371	0.0385	
8		0.1236	0.0093	0.0432	
9		-0.101	0.0512	0.054	
10		0.2394	-0.029	0.045	
11		0.11	0.0225	0.0603	
12		-0.085	-0.056	0.0896	

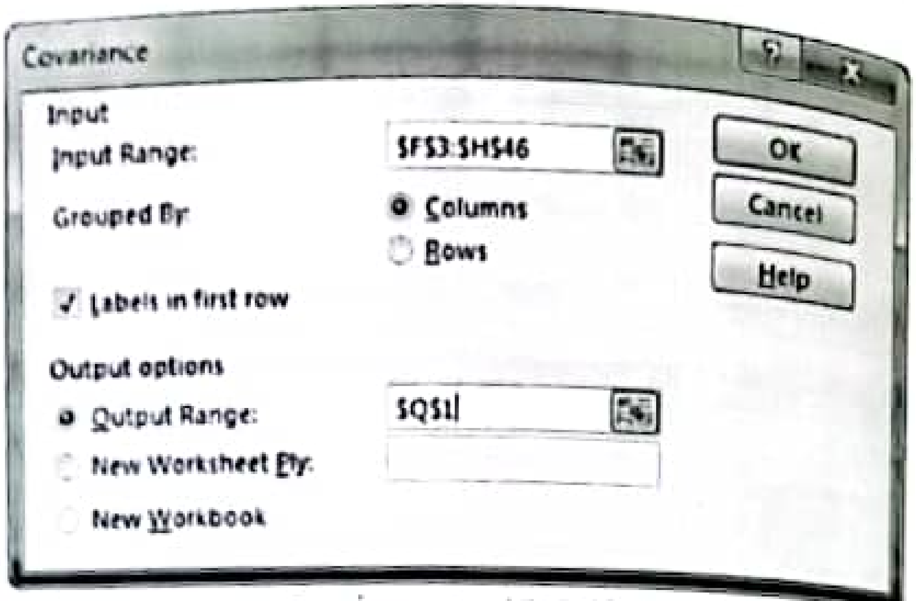
شکل ۳-۱۳ محاسبه بازده دارایی ها

ناحیه F3:H46 را انتخاب و کلیدهای ترکیبی ctrl+shift+F3 را می‌فشاریم تا نام‌گذاری گروهی را انجام دهیم. در سلول‌های J1:J3 میانگین بازده تاریخی هر کدام از دارایی‌ها را بدست می‌آوریم. به عنوان مثال در سلول J1 فرمول AVERAGE(ra) را می‌نویسیم. سلول‌های مربوط به محاسبه میانگین تاریخی یعنی ناحیه J1:J3 را return نام‌گذاری می‌کنیم.

سلول‌های N1، N2 و N3 را به عنوان بردار w در نظر می‌گیریم. نام ناحیه N1:N3 را w می‌گذاریم.

ماتریس Σ، ماتریس واریانس کواریانس است که به صورت کواریانس بین هر دو دارایی می‌باشد. علی‌رغم آنکه با استفاده از تابع covariance، می‌توانیم کواریانس بین هر دو دارایی را محاسبه نماییم و ماتریس Σ را تشکیل دهیم، اما بهتر است از ابزار data analysis استفاده کنیم. Data analysis یک add-in داخلی در اکسل می‌باشد و قبلا به اکسل اضافه شده است.

در منوی data سمت راست بر روی گزینه data analysis کلیک می‌کنیم سپس گزینه covariance را انتخاب کرده تا پنجره‌ای به صورت شکل زیر باز شود



شکل ۴-۱۳ پنجره covariance

Input Range: اطلاعات ستون‌هایی است که می‌خواهیم کواریانس بازدهی بین شان را حساب کنیم.
در این مثال سه ستون مربوط به بازده‌های تاریخی سه دارایی یعنی F3:H46 را وارد می کنیم.
Labels in first row: در صورتی که ردیف اول مربوط به اطلاعات وارد شده در input Range، عنوان‌های ستون‌ها باشد. (نام دارایی‌ها)، تیک این قسمت باید به حالت انتخاب درآید (که در این مثال وارد شده است)

نکته: همواره در گرفتن اطلاعات input Range، ردیف مربوط به عنوان را حتما انتخاب کنید و تیک مربوط به labels in first row را به حالت انتخاب در بیاورید. چرا که می‌خواهیم در خروجی مقادیر، مشخص باشد که هر کدام از کواریانس ها مربوط به کدام دو دارایی می‌باشند.

Grouped By: در صورتی که اطلاعات تاریخی دارایی‌ها به صورت ردیفی باشند، بعد از وارد کردن اطلاعات در input Range، در قسمت grouped by، rows را انتخاب می کنیم

نکته: اگر اطلاعات ردیفی باشد و در grouped By، تیک rows را انتخاب کرده باشیم، گزینه Labels in first row تبدیل به Labels in first column می‌شود.

Output Range: انتخاب فضایی است که می‌خواهیم اطلاعات ماتریس واریانس کواریانس در آن بدست آید. مشخص کردن تنها یک سلول کافی است. در این مثال سلول Q1 را انتخاب می‌کنیم.

باکلیک بر روی گزینه ok، مشاهده می‌شود که قسمت بالای ماتریس واریانس کواریانس نیامده است. به دلیل اینکه $cov(i, j) = cov(j, i)$ بنابراین مقادیر بالا مثلثی با مقادیر پایین مثلثی برابر می‌باشد. (شکل ۵-۱۳)

	P	Q	R	S	T	U
1			*ra*	*rb*	*rc*	
2		ra	0.027782			
3		rb	0.003866	0.011121		
4		rc	0.000207	-0.0002	0.001154	
5						
6						

شکل ۵-۱۳ ماتریس واریانس کواریانس

می‌توان به جای یک به یک کپی کردن سلول ها، از Paste Transpose استفاده کرد.

به عنوان مثال R3:R4 را کپی و در سلول S2 راست کلیک کرده و به صورت زیر عمل کنیم

Paste special → Transpose

ماتریس ۳×۳ مربوط به آدرس R2:T4 ماتریس واریانس کواریانس یا $\sum$ می‌باشد این ناحیه را sigma نام‌گذاری می‌کنیم.

۱۳-۲-۴ پیاده‌سازی مدل در اکسل

به منظور پیاده‌سازی مدل در اکسل، باید تابع هدف و محدودیت‌ها را در سلول‌های اکسل وارد کنیم.

تابع هدف: تابع هدف مدل به صورت حاصلضرب ۳ ماتریس می‌باشد. $(w^T.\sum.w)$ می‌توانیم ابتدا $(w^T.\sum)$ را در هم ضرب و سپس نتیجه را در w ضرب کنیم.

w^T یک ماتریس ۳×۱ و $\sum$ یک ماتریس ۳×۳ می‌باشد. پس حاصلضرب آنها یک ماتریس ۳×۱ خواهد بود. با توجه به آنکه با آرایه‌ها سروکار داریم،طبق قاعده ابتدا باید به اندازه خروجی یعنی ۳×۱ سلول‌های W1:Y1 انتخاب می‌کنیم و فرمول زیر را بنویسیم:

= MMULT(TRANSPOSE(w); sigma)

سپس طبق قاعده دوم آرایه‌ها، کلید های ترکیبی ctrl+shift را نگه داشته و کلید Enter را انتخاب کنیم.

($w^T.\sum$) یک ماتریس ۳×۱ و w یک ماتریس ۱×۳ پس خروجی ($w^T.\sum.w$) ۱×۱ خواهد بود که همان واریانس سبد می‌باشد. بنابراین در سلول X3 داریم:

$$= MMULT(W1:Y1; w)$$

با نگه داشتن کلیدهای ctrl+shift و سپس Enter. با خطای valueرو به رو می‌شویم. دلیل این خطا آن است که مقادیر w هنوز به دست نیامده‌اند. بعد از بهینه سازی،w بدست می‌آید.

نکته: علت آنکه برای بدست آوردن مقدار تابع هدف ابتدا دو ماتریس اول را در هم ضرب کردیم و سپس نتیجه را در ماتریس سوم ضرب نموده‌ایم، این است که تابع MMULT تنها دو ماتریس به عنوان ورودی می‌پذیرد. اما می‌توانیم از تابع MMULT به صورت ترکیبی با خود تابع MMULT استفاده کنیم. بنابراین در سلول S6خواهیم داشت:

$$= MMULT(MMULT(TRANSPOSE(w); sigma); w)$$

کلیدهای ترکیبی Ctrl+shift را نگه داشته و سپس کلید Enter را می‌فشاریم.

بعد از مشخص شدن تابع هدف، باید ($w^T.1$) که در سمت راست تنها محدودیت مدل می‌باشد را وارد کنیم. ($w^T.1$) در واقع به صورت $w_1 + w_2 + w_3$ می‌باشد. بنابراین در زیر بردار w در سلول N4 داریم:

$$= SUM(w)$$

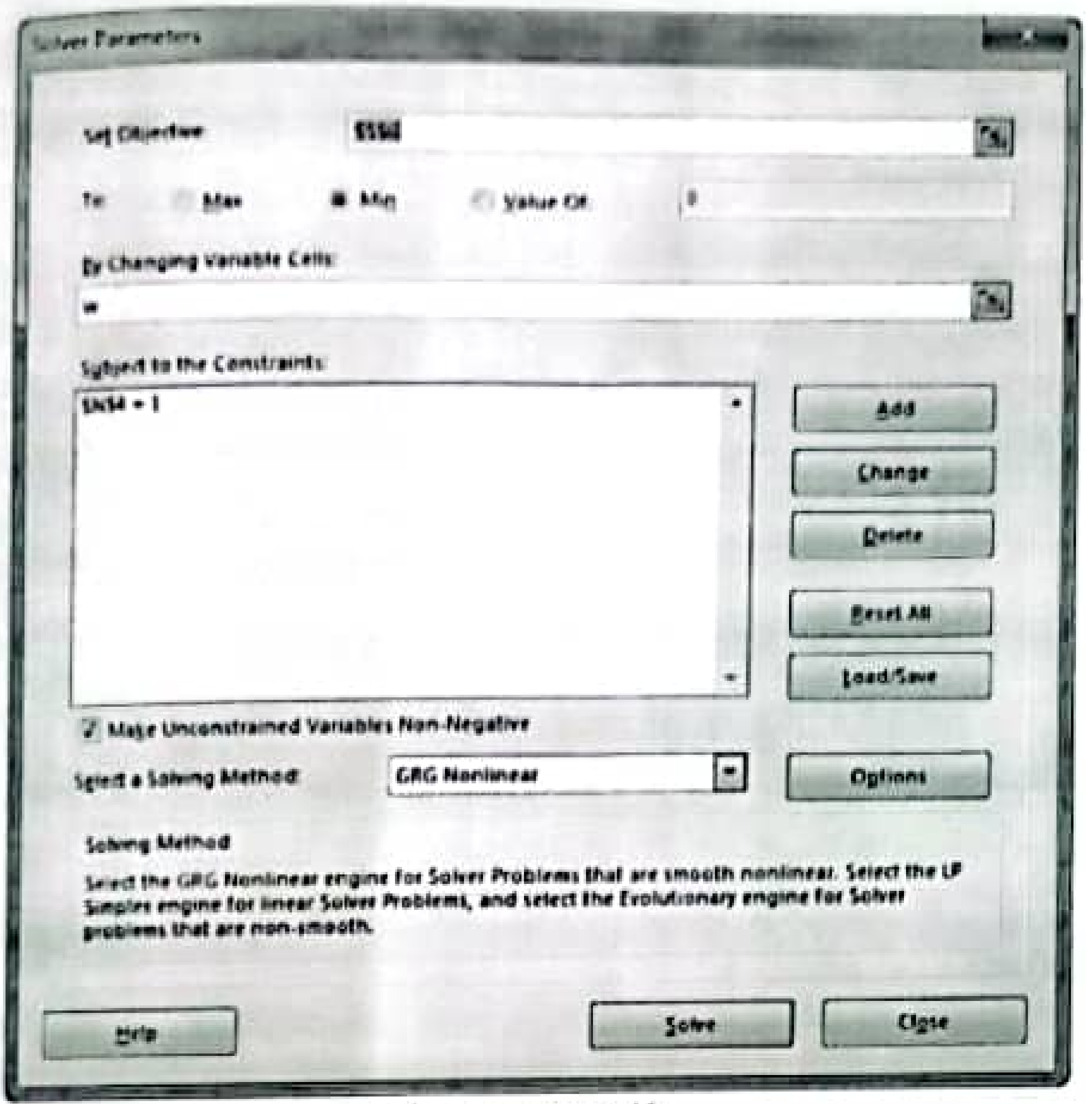
که در حال حاضر به دلیل مشخص نمودن وزن‌های بهینه، صفر خواهد بود.

۱۳-۲-۴-۱ حل مدل در نقطه Min Risk

در این حالت مدل به صورت زیر می‌باشد:

$$\min w^T.\sum.w$$
$$s.t:$$
$$w^T.1 = 1$$
$$w \geq 0$$

از منوی data، گزینه solver را انتخاب می‌کنیم تا پنجره ای به صورت شکل ۶-۱۳ باز شود.



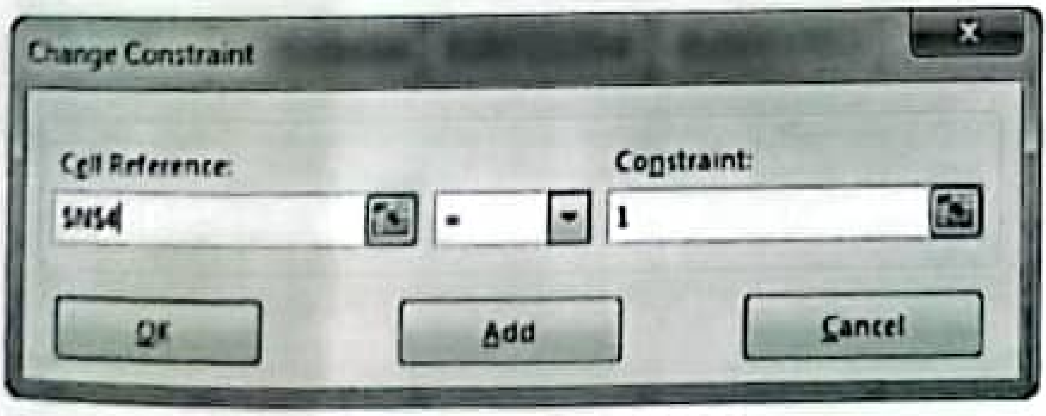
شکل ۶-۱۳ پنجره solver

Set objective: تابع هدف که سلول S6 می‌باشد.

To: Min را انتخاب می‌کنیم تا نوع فرآیند مشخص شود.

By charging variable cells: متغیرهای مسأله که w نام‌گذاری نموده‌ایم را وارد می‌کنیم

در قسمت محدودیت‌ها، با کلیک روی گزینه add تنها محدودیت مسأله را به صورت شکل زیر وارد می‌کنیم:



شکل ۷-۱۳ محدودیت مربوط به جمع وزن‌ها

بعد از وارد کردن محدودیت‌ها، گزینه زیر را انتخاب می‌کنیم تا مثبت بودن وزن‌ها را اعمال کرده باشیم

Make unconstrained variables non-negative

و در انتها با فشردن گزینه solve، مقادیر بهینه در سلول‌های مربوطه قرار می‌گیرند. (شکل ۸-۱۳)

	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
							ra	rb	rc
1		w1	0.0156			ra	0.027782	0.0038656	0.000207
2		w2	0.1004			rb	0.0038656	0.0111214	-0.0001953
3		w3	0.8841			rc	0.000207	-0.000195	0.001154
4			1						
5									
6							variance	0.0010038	

شکل ۸-۱۳ مقادیر بهینه وزن‌ها

جواب‌های بهینه وزن‌ها به صورت $w_1 = 0.0156$ ،$w_2 = 0.1004$ ،$w_3 = 0.8841$ بدست آمده‌اند. مقدار بهینه تابع هدف برابر با ۰٫۰۰۱۰۰۳۸ بدست آمده است که واریانس سبد در نقطه مینیمم می‌باشد. بنابراین ریسک یا انحراف معیار سبد در نقطه‌ی مینیمم برابر خواهد بود با:

= SQRT(S6)

که مقدار آن ۰٫۰۳۱۶ بدست می‌آید.

جدولی مشابه شکل ۹-۱۳ در سلول‌های O8:U14 ایجاد می‌کنیم.

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
7									
8		point	risk	return	w1	w2	w3	K	
9		min							
10		1							
11		2							
12		3							
13		4							
14		max							
15									

شکل ۹-۱۳ جدول مربوط به اطلاعات نقاط منحنی مارکویتز

نقاط ۱ تا ۴ نقاط میانی هستند که مدل شان جهت بهینه‌سازی با مدل نقطه min و نقطه max متفاوت است.

نکته: قبل از انکه بخواهیم بهینه‌سازی مربوط به سایر نقاط را انجام دهیم، همواره باید مقادیر بهینه بدست امده در مرحله قبل را در جای دیگر کپی کنیم. چراکه برای بدست آوردن مقادیر بهینه نقاط جدید، باید وزن‌های قبلی را پاک کنیم.

سپس این وزن‌های (N1:N3) را کپی می‌کنیم در ردیف R9:T9، Paste special → Transpose را انتخاب تا وزن‌ها به صورت افقی بدست آیند.

سپس، در سلول P9، تابع SQRT(S6) را نوشته تا ریسک سبد بدست آید. بعد از مشخص شدن W_1 ها می‌توانیم بازدهی سبد را با استفاده از رابطه زیر بدست آوریم:

$$R_p = w_1.\bar{R}_1 + w_2.\bar{R}_2 + w_3.\bar{R}_3$$

با استفاده از تابع SUMPRODUCT می‌توان R_P را در سلول Q9 به صورت زیر محاسبه کرد:

= SUMPRODUCT(return; w)

بدین ترتیب ریسک و بازده مربوط به نقطه Min را بدست آوردیم. سلول‌های P9 و Q9 را تا ردیف سلول‌های P13 و Q13 (نقطه ۵) درگ می‌کنیم تا ریسک و بازده تمامی نقاط بدست آیند. برای اینکه ریسک و بازده هم مانند وزن‌ها از جنس عدد باشند، سلول‌های P9 و Q9 را کپی و روی خودشان Paste special → value را انتخاب می‌کنیم. بنابراین ردیف مربوط به نقطه‌ی مینیمم به صورت value بدست می‌آید.

۱۳-۲-۴-۲ حل مدل در نقطه Max Risk

در این حالت مدل به صورت زیر می باشد:

$$\begin{aligned}&\max\ w^T.\sum.w\\&s.t:\\&w^T.1 = 1\\&w \geq 0\end{aligned}$$

جهت حل مدل در نقطه Max Risk باید به ترتیب گام‌های زیر را طی کنیم:

۱- پاک کردن وزن‌های بهینه نقطه قبل

۲- انتخاب ابزار solver

۳- در قسمت To، تبدیل Min به Max و سپس انتخاب گزینه solver

وزن های بهینه در این سبد به صورت $w_1 = 1$، $w_2 = 0$، $w_3 = 0$ بدست می‌آیند و مقدار واریانس نیز برابر با ۰٫۲۷۷۸ می‌شود.

همانند حالت قبل برای آنکه ریسک و بازده از جنس عدد باشند، سلول‌های P14 و Q14 را کپی و روی خودشان value ← Paste special را انتخاب می‌کنیم.

پس از پاک کردن وزن‌ها، جدول به صورت شکل ۱۰-۱۳ خواهد بود.

point	risk	return	w1	w2	w3	R
min	0.031683077	0.0656564	0.0155787	0.1003688	0.8840525	
1	#VALUE!	0				
2	#VALUE!	0				
3	#VALUE!	0				
4	#VALUE!	0				
max	0.166679391	0.1205707	1	0	0	

شکل ۱۰-۱۳ جدول مربوط به نقاط min و max

بخش دوم: یافتن حداقل چهار نقطه بین نقاط min و max به منظور رسم منحنی مرز کارا

مدل مربوط به هر کدام از نقاط ۱ تا ۴ به صورت زیر می‌باشد:

$$\min w^{T}.\sum.w$$

$$\text{s.t:}$$

$$w^{T}.R = \bar{R} \qquad R_A < \bar{R} < R_B$$

$$w^{T}.1 = 1 \qquad \text{return1} < \bar{R} < \text{return2}$$

$$w \geq 0$$

در این حالت باید وزن‌های بهینه نقاط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را به ازاء بازده‌های مشخص بدست آوریم.
بازده‌های مربوط به نقاط ۱ تا ۴ را به ترتیب R_1، R_2، R_3 و R_4 در نظر می‌گیریم.
به عنوان مثال برای بدست آوردن وزن‌های بهینه سبد مربوط به نقطه‌ی ۱، به دنبال وزن‌هایی می‌گردیم که در سطح بازده مشخص R_1، حداقل ریسک را داشته باشد.
R_1، R_2، R_3 و R_4 بازده‌های اختیاری بین دو بازده return_{min} و return_{max} می‌باشند.
بنابراین می‌توان این بازده‌ها را به صورت مساوی بین این دو بازده مذکور در نظر گرفت.
k را برابر با مقدار زیر در نظر می‌گیریم:

$$k = \frac{\text{return}_{max} - \text{return}_{min}}{5}$$

$$\begin{cases} R_1 = return_{min} + k \\ R_2 = return_{min} + 2k \\ R_3 = return_{min} + 3k \\ R_4 = return_{min} + 4k \end{cases}$$

بدین ترتیب بازده‌های اختیاری را برای نقاط بدست می‌آوردیم.

بنابراین مدل مسأله برای سبد بهینه مربوط به نقطه‌ی ۱ به صورت زیر خواهد بود.

$$\min w^T . \sum . w$$

$$\begin{aligned} & s.t: \\ & w^T.\bar{R} = return_{min} + k \\ & w^T.1 = 1 \\ & w \geq 0 \end{aligned}$$

در انتهای جدول O8:U14 ستونی با عنوان بازده اختیاری تشکیل می‌دهیم تا مقادیر R_iها را در آن قرار دهیم و در ستون return، محدودیت سمت چپ، سطح بازده مشخص یعنی $w^T.\bar{R}$ را وارد می‌کنیم.

در سلول U10 فرمول مربوط به R_1 را به صورت زیر می‌نویسیم و تا U13 درگ می‌کنیم

= ((Q14 − Q9)/5) * O10 + Q9

نتایج به صورت شکل ۱۱-۱۳ خواهد بود.

	O	P	Q	R	S	T	U	V
7								
8	point	risk	return	w1	w2	w3	R	
9	min	0.031683077	0.0656564	0.0155787	0.1003688	0.8840525		
10	1	#VALUE!	0				0.076639	
11	2	#VALUE!	0				0.087622	
12	3	#VALUE!	0				0.098605	
13	4	#VALUE!	0				0.109588	
14	max	0.166679391	0.1205707	1	0	0		
15								

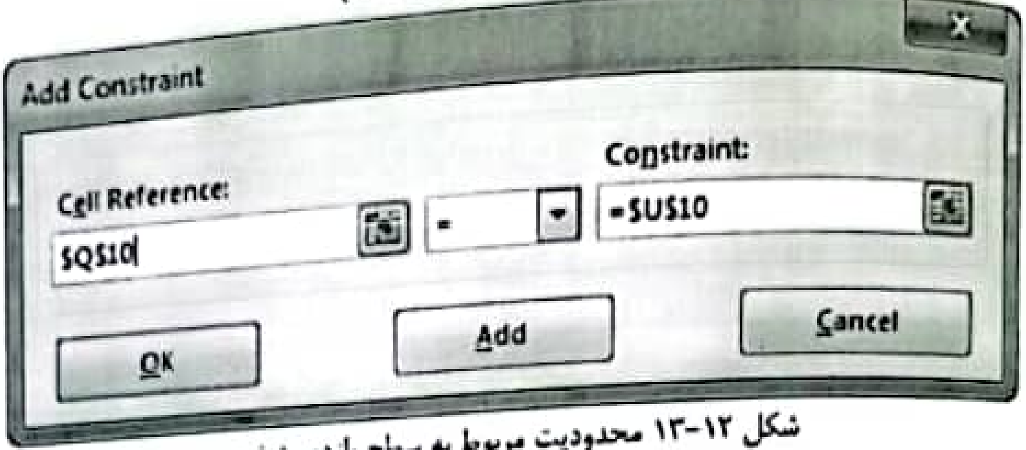
شکل ۱۱-۱۳ نتایج جدول برای بازده های اختیاری

با توجه به نامعلوم بودن مقادیر وزن‌ها، سلول Q10 در حال حاضر مقدار صفر اختیار می‌کند. از منوی data، گزینه solver را انتخاب می‌کنیم. همانطور که می‌بینیم اطلاعات مربوط به مدل نقطه‌ی Max در آن وجود دارد. برای پیاده‌سازی نقطه‌ی ۱ تغییرات زیر را اعمال می‌کنیم:

۱- تبدیل تابع هدف از Max به Min

۲- اضافه کردن محدودیت مربوط به بازده مشخص

در قسمت subject to the constraints، گزینه add را انتخاب و محدودیت مربوط به سطح بازده مشخص را به صورت زیر وارد می‌کنیم. (شکل ۱۲-۱۳)



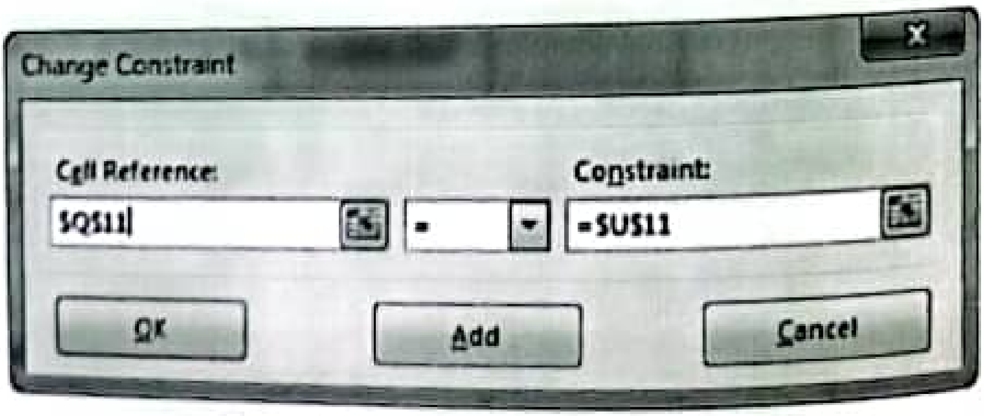
شکل ۱۲-۱۳ محدودیت مربوط به سطح بازده مشخص

در نهایت با انتخاب گزینه solver، وزن‌های بهینه بدست می‌آید. سپس، مشابه ۲ نقطه مینیمم و ماکزیمم، وزن‌ها را کپی و در سلول‌های R10:T10، Paste special → Transpose را انتخاب تا اطلاعات مورد نیاز نقطه ۱ بدست آمده‌آید.

و در انتها ریسک و بازده را کپی و روی خودشان Paste value می‌کنیم تا مقادیر بهینه نقطه‌ی ۱ بدست آید.

همین مراحل را برای نقاط ۲ و ۳ و ۴ نیز انجام می‌دهیم. مراحل شبیه نقطه ۱ انجام می‌دهیم به عنوان مثال برای نقطه‌ی ۲:

- وزن‌های بهینه نقطه قبل را پاک می‌کنیم.
- محدودیت مربوط به سطح بازده مشخص را به صورت زیر تغییر می‌دهیم (شکل ۱۳-۱۳)



شکل ۱۳-۱۳ محدودیت مربوط به سطح بازده مشخص

و سایر مراحل را مشابه نقطه‌ی ۱، انجام می‌دهیم. در نهایت جدولی مطابق با شکل ۱۴-۱۳ خواهیم داشت.

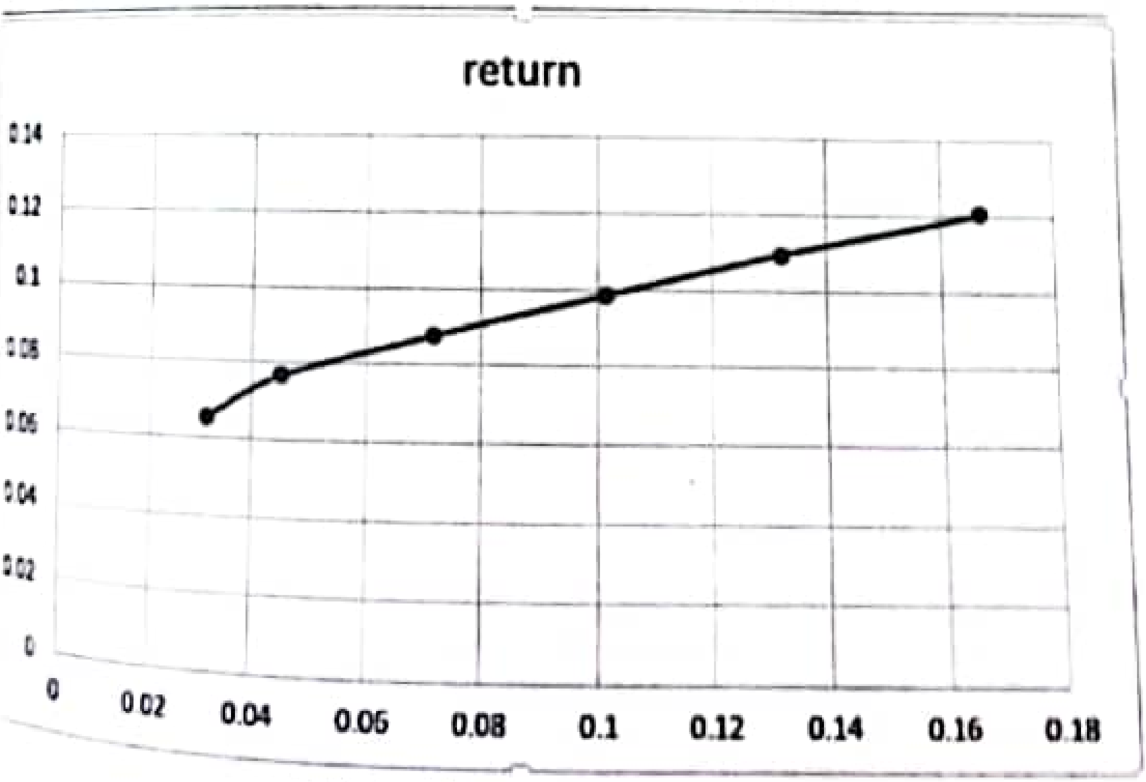
point	risk	return	w1	w2	w3	R
min	0.031683077	0.0656564	0.0155787	0.1003688	0.8840525	
1	0.045052648	0.0766393	0.1961306	0.1416158	0.6622536	0.076639
2	0.071466865	0.0876221	0.3766825	0.1828626	0.4404548	0.087622
3	0.101178717	0.098605	0.5572345	0.2241094	0.2186561	0.098605
4	0.131980381	0.1095878	0.7389274	0.2610726	0	0.109588
max	0.166679391	0.1205707	1	0	0	

شکل ۱۴-۱۳ جدول نهایی مربوط به نقاط منحنی مارکویتز

رسم منحنی مرز کارا

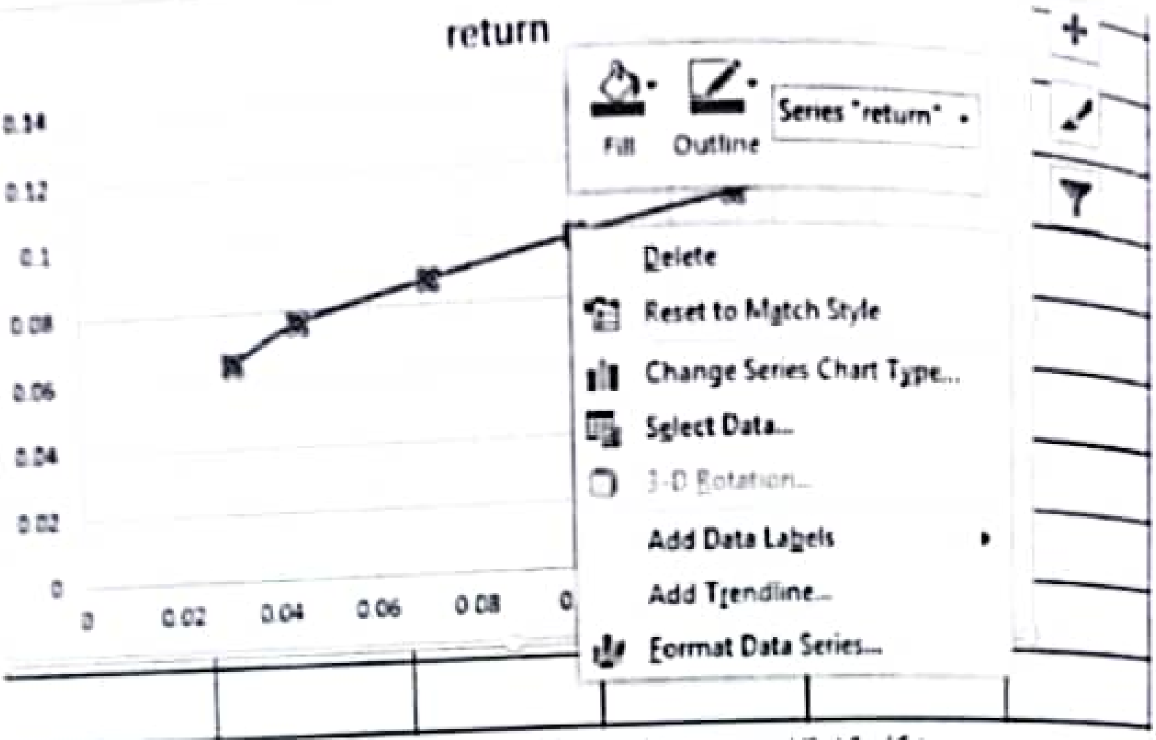
منحنی مرز کارا از ریسک و بازده سبد بهینه تشکیل شده است که محور x آن ریسک سبد و محور y بازده سبد می باشد. بنابراین برای رسم منحنی، ناحیه P8:Q14 را انتخاب و از مسیر زیر منحنی مرز کارای آن را رسم می‌کنیم. (شکل ۱۵-۱۳)

Insert → Charts → Scatter → scatter with Smooth lines and markers



شکل ۱۵-۱۳ منحنی مرز کارای مارکویتز

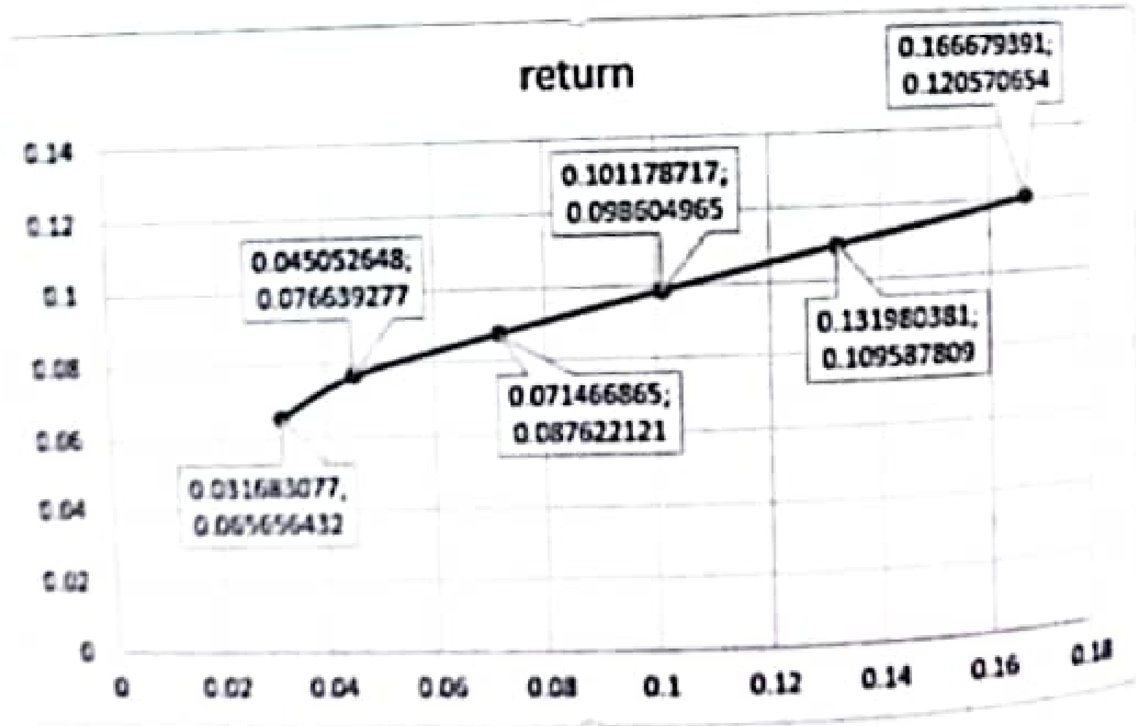
می‌توان مقادیر ریسک و بازده مربوط به هر نقطه را به صورت زوج مرتب نشان داد. بدین منظور روی یکی از نقاط راست کلیک کرده تا منوی زیر باز شود. (شکل ۱۶-۱۳)



شکل ۱۶-۱۳ پنجره مربوط به تشکیل زوج مرتب ریسک و بازده

از منوی بازشده، بعد از انتخاب گزینه Add data labels گزینه add data callouts را انتخاب می‌کنیم.

ریسک و بازده هر کدام از نقاط به صورت شکل زیر مشخص می‌شود:



شکل ۱۷-۱۳ نقاط ریسک و بازده

مثال: نمودار ترکیبی[1] مربوط به سبد فوق را رسم نمایید.

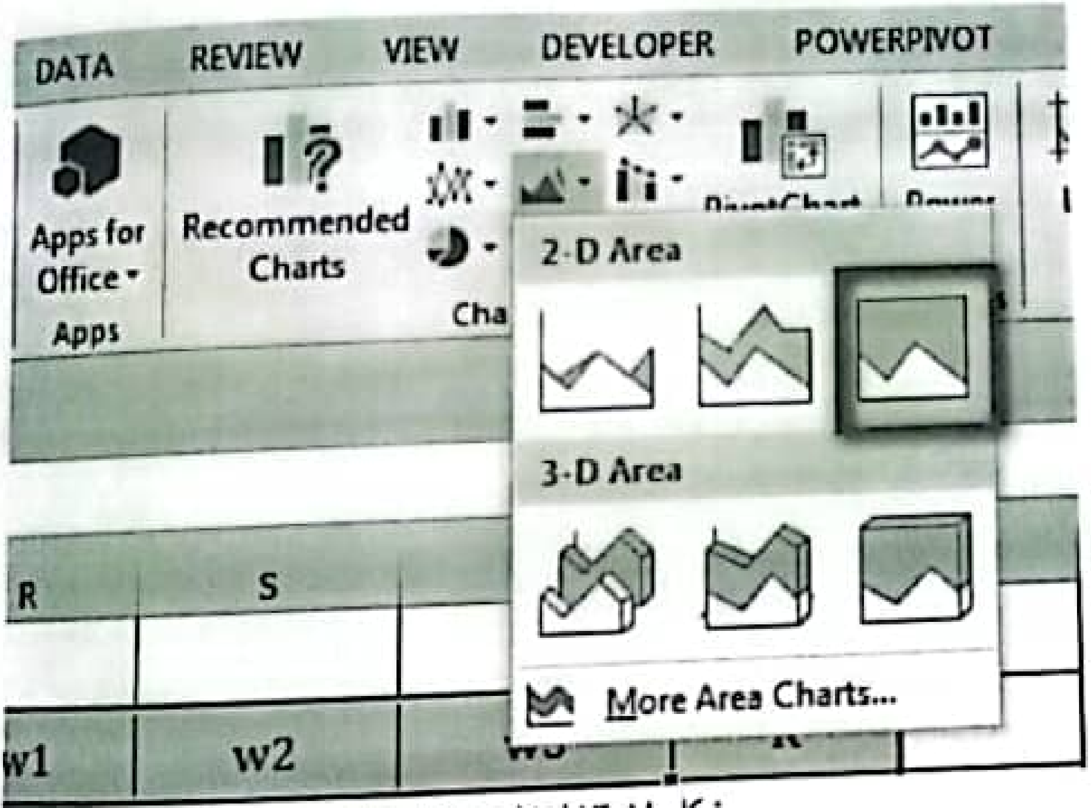
نکته: این نمودار سبدهای مختلف با ریسک و بازده متفاوت را نشان می‌دهد که مجموع وزن‌ها برابر با یک می‌باشد. بنابراین برای رسم این منحنی باید مقادیر وزن‌ها یعنی ناحیه R9:T14 را انتخاب و سپس مسیر زیر را جهت رسم منحنی طی کنیم:

Insert → chart → insert area chart

stacked area: منحنی ترکیبی در حالت دو بعدی

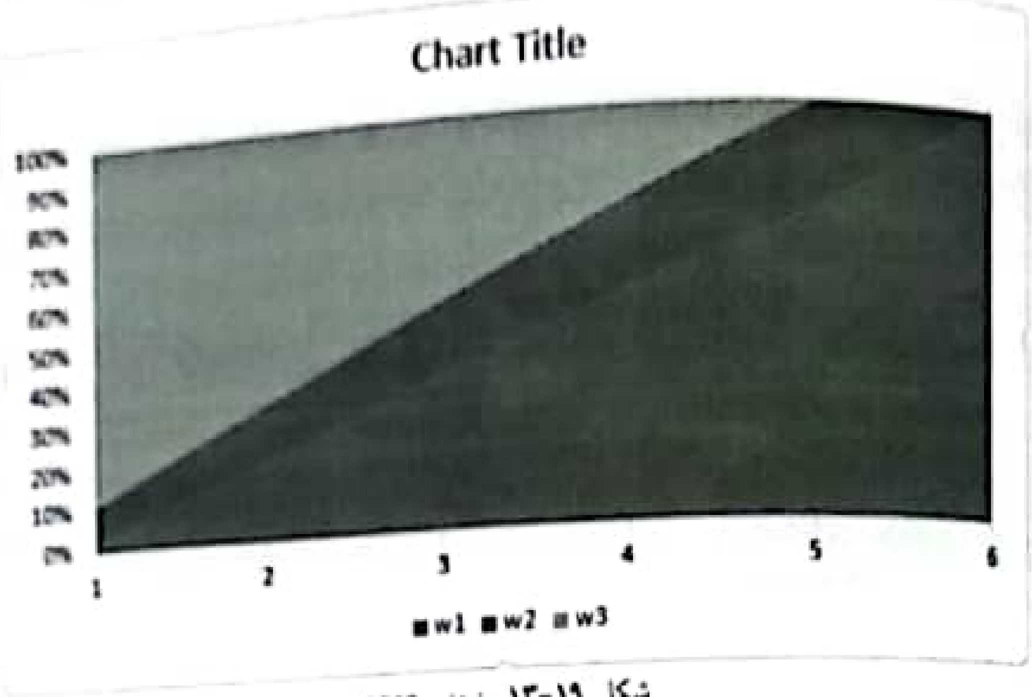
stacked area: منحنی ترکیبی در حالت سه بعدی

(شکل ۱۸-۱۳)



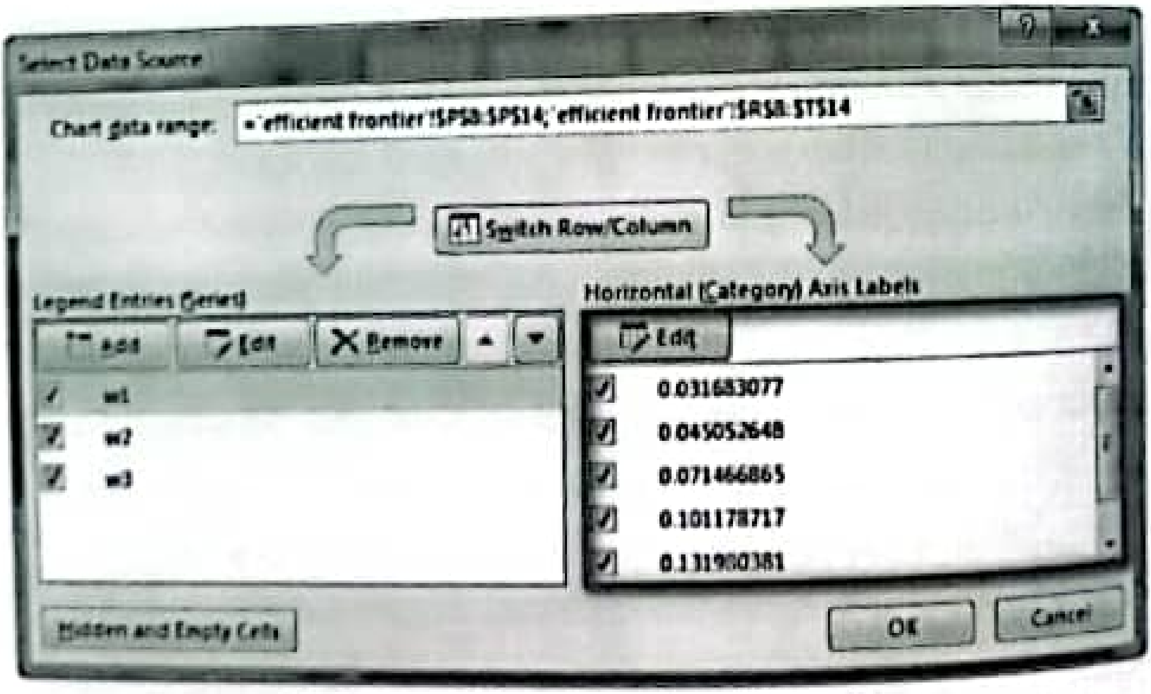
شکل ۱۸-۱۳ انتخاب منحنی area

[1]. Composition



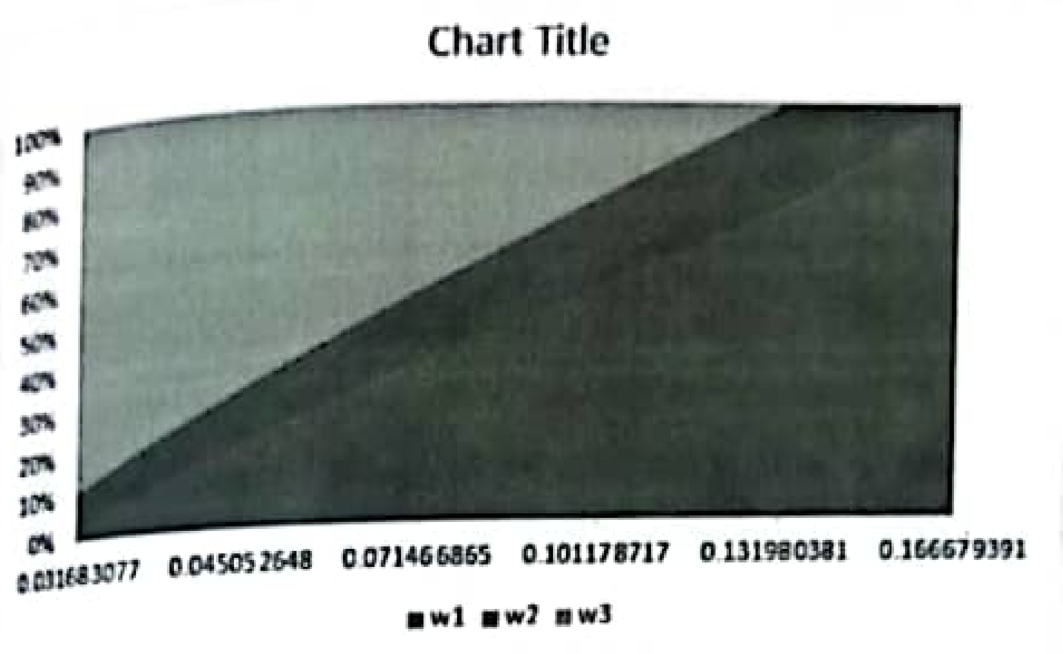
شکل ۱۹-۱۳ منحنی area

جهت نمایش دادن مقادیر ریسک بر روی محور x، روی منحنی راست کلیک می‌کنیم و از منوی باز شده گزینه select data را انتخاب و مطابق با شکل ۲۰-۱۳ در سمت راست که مربوط به محور x است، مقادیر ریسک را وارد می‌کنیم.



شکل ۲۰-۱۳ وارد کردن مقادیر ریسک در منحنی area

در انتها، نمودار نهایی به صورت زیر می‌شود. (شکل ۲۱-۱۳)



شکل ۲۱-۱۳ منحنی نهایی area

۱۳-۲-۵ تحلیل نمودار مرز کارا

همانطور که مشاهده می شود، رنگ آبی مربوط به دارایی اول یا A، رنگ قرمز مربوط به دارایی دوم یا B و رنگ سبز مربوط به دارایی سوم یا C می‌باشد. با افزایش ریسک سرمایه‌گذاری، حجم رنگ آبی زیاد می‌شود، بدین معنی که در سبدهایی با ریسک بالاتر، دارایی A سهم بیشتری خواهد داشت. چرا که دارایی A یک دارایی ریسکی است و باید در ریسک‌های بالاتر، وزن بیشتری را داشته باشد. از طرفی وزن داراییC با افزایش ریسک، به سمت صفر میل می‌کند، چرا که این دارایی یک دارایی کم ریسک است که در سبدهایی با ریسک پایین‌تر سهم بیشتری خواهد داشت.

نکته: مرز کارای رسم شده شامل مجموعه‌ای از سبدهای بهینه از کمترین ریسک تا بیشترین ریسک می‌باشد. حال سوالی که پیش می‌آید این است که برای یک سرمایه‌گذار کدامیک از سبدهای بهینه، مناسب‌تر است و وزن‌های بهینه خود را چطور انتخاب کند؟

این سوال مهمی است که قصد داریم به آن پاسخ دهیم. باید توجه داشته باشیم که درجه ریسک گریزی افراد که با یکدیگر متفاوت است، عنصر تاثیرگذاری در انتخاب سبد بهینه می‌باشد. بنابراین باید در گام اول میزان ریسک گریزی و ریسک پذیری افراد را شناسایی و بر مبنای آن سبد کارای سرمایه‌گذار را با توجه به منحنی مرز کارای آن بدست می‌آوریم.

۱۲-۳ حالت دوم، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری برای یک سرمایه‌گذار با سطح ریسک گریزی مشخص با استفاده از منحنی‌های بی‌تفاوتی و تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار.

ابتدا مفهوم تابع مطلوبیت[1] و منحنی‌های بی‌تفاوتی[2] را به اختصار توضیح می‌دهیم.

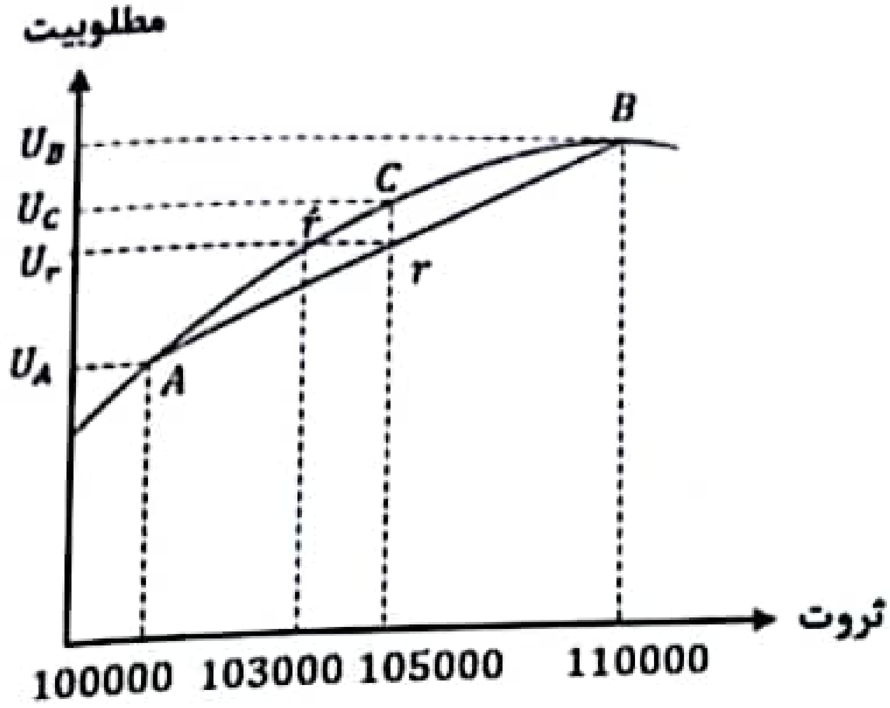
۱۲-۳-۱ تابع مطلوبیت

رابطه دقیق بین مطلوبیت یک سرمایه‌گذار و ثروت او، تابع مطلوبیت ثروت نامیده می‌شود. تحت فرض رکودستیزی (فرض اینکه سرمایه‌گذاران همیشه از بین دو سبد، سبدی را انتخاب می‌کنند که بازده مورد انتظار بالاتری را داشته باشد)، تمامی سرمایه‌گذاران ثروت بیشتر را به ثروت کمتر ترجیح می‌دهند. هر سرمایه‌گذار تابع مطلوبیت منحصر به فردی دارد. به عنوان مثال یک شخص ثروتمند احتمالاً، ارزش کمتری را برای مبلغ اضافی ثروت، نسبت به یک فرد فقیر قائل است.

فرض کلی این است که مطلوبیت نهایی سرمایه‌گذاران نزولی است. یعنی اگر چه هر مبلغ اضافی، مطلوبیت اضافی مثبتی را ایجاد می‌کند، اما مقدار این مطلوبیت پی در پی کاهش می‌یابد.

سرمایه‌گذار با مطلوبیت نهایی نزولی (مشتق دوم منفی) ضرورتا ریسک گریز بوده و منحنی آن به صورت زیر می‌باشد. (شکل ۲۲-۱۳)

[1] Utility Function
[2] Indifference Curves



شکل ۲۲-۱۳ منحنی سرمایه‌گذار با مطلوبیت نهایی نزولی

منحنی بالا مربوط به یک سرمایه‌گذار ریسک گریز است که اگر ۱۰۰،۰۰۰ واحد پولی داشته باشد، مطلوبیتش برابر با U_A می‌باشد و اگر ثروتی معادل با ۱۱۰،۰۰۰ واحد پولی داشته باشد مطلوبیتش برابر با U_B خواهد شد.

فرض کنیم این فرد دو گزینه سرمایه‌گذاری پیش رو داشته باشد. می‌خواهیم ببینیم در هر کدام از این دو گزینه چه مطلوبیتی برایش ایجاد می‌شود.

۱. سرمایه‌گذاری بدون ریسک:

۱۰۰،۰۰۰ واحد پولی را فرد سرمایه‌گذار با سود ۵٪ در بانک سرمایه‌گذاری می‌کند و سپس ۱۰۵،۰۰۰ واحد پولی برداشت کند که این میزان ثروت، مطلوبیتی معادل با U_C برای شخص ایجاد می‌کند.

۲. سرمایه‌گذاری ریسکی:

شخص سرمایه‌گذار ۱۰۰،۰۰۰ واحد پولی دارد و می‌خواهد در یک کار ریسکی وارد شود که ۵۰٪ احتمال دارد بازده صفر و ۵۰٪ احتمال دارد، ۱۰٪ بازدهی داشته باشد. پس امید ریاضی بازده آن به صورت زیر می‌باشد:

$$(50\%)(100000) + (50\%)(110000) = 105000$$

اما این مقدار ۱۰۵،۰۰۰ از ترکیب خطی ۱۰۰،۰۰۰ و ۱۱۰،۰۰۰ بدست آمده است و غیر قطعی و ریسکی می‌باشد و با توجه به مقادیر احتمال بازدهی، می‌تواند هر مقداری بین ۱۰۰،۰۰۰ تا

۱۱۰،۰۰۰ باشد. یعنی می‌تواند هر مقداری روی خط AB داشته باشد. در این حالت (احتمال ۵۰٪، ۵۰٪) مطلوبیت سرمایه‌گذاری ریسکی برابر با U_r می‌باشد که مقداری کمتر از U_c است پس این سرمایه‌گذاری در شرایط ریسکی مطلوبیت U_r و در شرایط بدون ریسک مطلوبیت U_c کسب می‌کند. در حالت های دیگر نیز به دلیل کمتر بودن مطلوبیت هر نقطه از خط AB از مطلوبیت هر نقطه کمان AB، پس سرمایه‌گذار شرایط قطعی را به شرایط ریسکی ترجیح می‌دهد. به همین دلیل است که می‌گوییم این سرمایه‌گذار ریسک‌گریز است.

نکته۱: مطلوبیت مربوط به خط AB ریسکی و مطلوبیت مربوط به کمان AB که روی منحنی تابع مطلوبیت این سرمایه‌گذاری واقع شده است، بدون ریسک است.

نکته۲: برای یک فرد ریسک‌پذیر، تقعر منحنی تابع مطلوبیت، مثبت می‌باشد. به عبارتی خط AB بزرگتر از کمان AB است. به عبارتی مطلوبیت سرمایه‌گذاری ریسکی برای یک فرد ریسک‌پذیر، از سرمایه‌گذاری بدون ریسک بیشتر است.

مجددا منحنی تابع مطلوبیت فرد ریسک‌گریز را در نظر بگیرید.

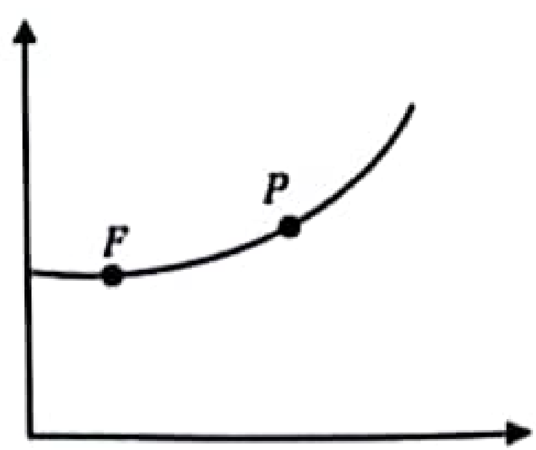
همانطور که در منحنی مشاهده می‌شود در یک مطلوبیت مشخص به عنوان مثال U_r، فرد سرمایه‌گذار ثروت ۱۰۵،۰۰۰ را در حالت ریسکی با احتمال ۵۰٪ بدست آورده و ثروت ۱۰۳،۰۰۰ را در حالت قطعی و بدون ریسک کسب کرده است.سایر نقاطی که در مطلوبیت U_r بدست می‌آید:

(risk = 50% ,　　return = 5%) : r نقطه

(risk = 0　　,　　return = 3%) : f نقطه (قطعی)

...

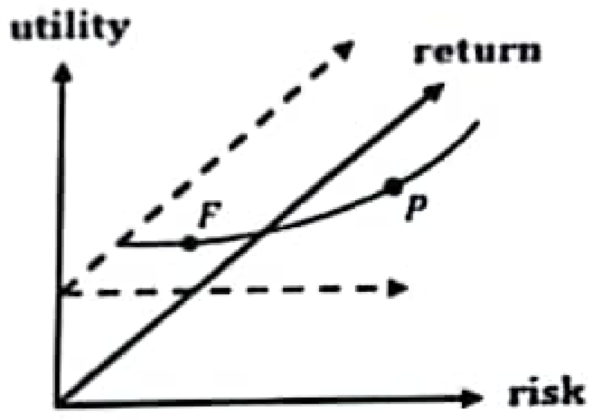
بنابراین در این سطح مطلوبیت، منحنی بازده برحسب ریسک را برای این سرمایه‌گذار رسم می‌کنیم که در سطح U_r نموداری به صورت شکل ۲۳-۱۳خواهد بود.



شکل ۲۳-۱۳ منحنی مطلوبیت در سطح U_r

اگرچه که کلیه نقاط موجود روی این منحنی دارای ریسک و بازده متفاوتی هستند (به عنوان مثال نقاط P و F)، اما تمامی آنها مطلوبیت یکسانی (U_2) را برای این سرمایه‌گذار خواهند داشت. به این منحنی، **منحنی بی‌تفاوتی** می‌گویند.

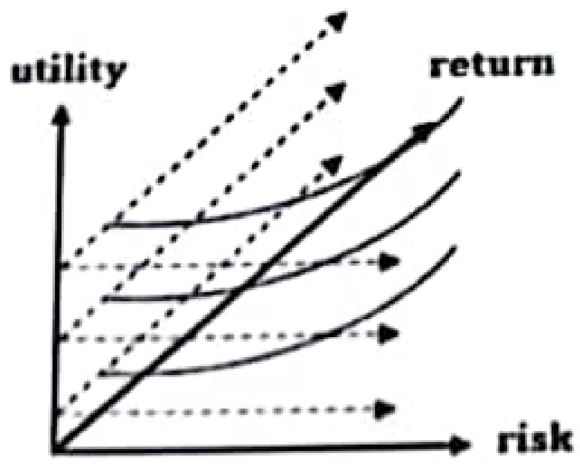
این منحنی در سطح U_2 رسم شده است. به عبارتی این منحنی محور z هم دارد که مطلوبیت را نشان می‌دهد (شکل ۲۴-۱۳)



شکل ۲۴-۱۳ منحنی مطلوبیت در سطح U_2 در فضای سه بعدی

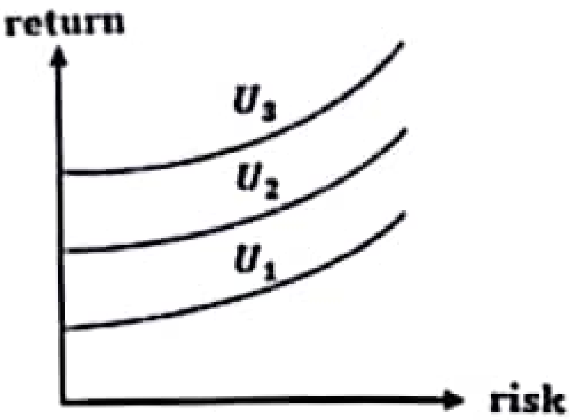
که، آن را روی محور z=0 تصویر کردیم.

اگر برای سایر مطلوبیت‌ها، منحنی‌های بی‌تفاوتی را رسم کنیم، در سطح‌های مشخصی از محور z شکل ۲۵-۱۳ را خواهیم داشت.



شکل ۲۵-۱۳ منحنی های بی تفاوتی در فضای سه بعدی

و در صورتی که این منحنی‌ها را روی محور z=0 تصویر کنیم به صورت شکل ۲۶-۱۳ خواهد شد.



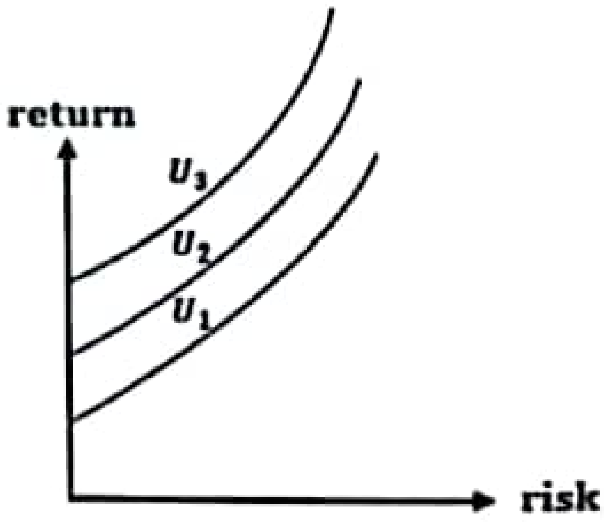
شکل ۲۶-۱۳ منحنی های بی تفاوتی در صفحه Z=0

$U_3 > U_2 > U_1$

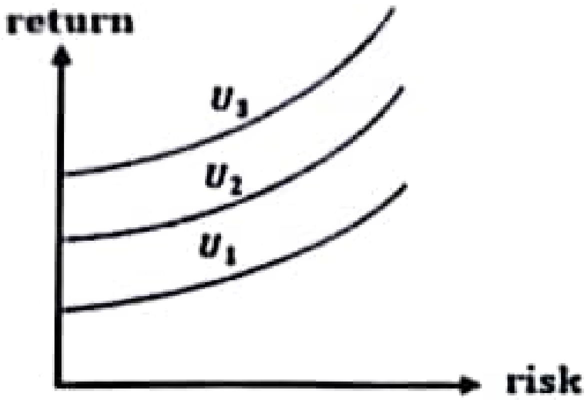
به منحنی‌های فوق، منحنی‌های بی‌تفاوتی گفته می‌شود.

مطلوبیت U_3 بیشتر از مطلوبیت U_2 و مطلوبیت U_2 بیشتر از مطلوبیت U_1 است. مسلما هر سرمایه‌گذار به دنبال حداکثر کردن مطلوبیت خود می‌باشد.

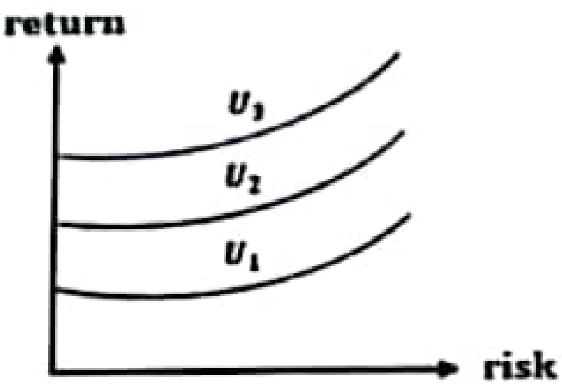
نکته: منحنی‌های بی‌تفاوتی سرمایه‌گذار با ریسک‌گریزی بالا، ریسک‌گریزی متوسط و ریسک‌گریزی کم (ریسک‌پذیر)، به صورت شکل‌های ۲۷-۱۳، ۲۸-۱۳ و ۲۹-۱۳ می‌باشد.



شکل ۲۷-۱۳ منحنی‌های بی‌تفاوتی سرمایه‌گذاری با ریسک گریزی بالا



شکل ۲۸-۱۳ منحنی‌های بی تفاوتی سرمایه گذاری با ریسک گریزی متوسط



شکل ۲۹-۱۳ منحنی‌های بی‌تفاوتی سرمایه‌گذاری با ریسک گریزی کم

معادله منحنی‌های بی‌تفاوتی برحسب بازده، ریسک و مطلوبیت به صورت زیر می‌باشد.

$$U = r - \left(\frac{1}{2}\right) . \alpha . \sigma^2$$

r بازده، σ ریسک و U معرف مطلوبیت شخص سرمایه‌گذار می‌باشد و ضریب α نیز با توجه به سطح ریسک گریزی فرد بدست می‌آید.

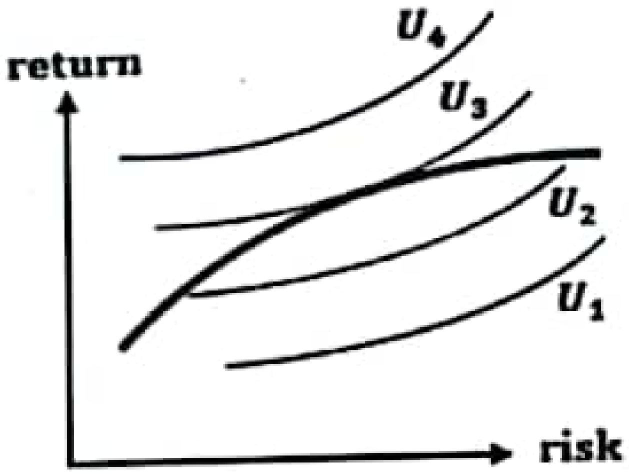
اگر فرض کنیم U=0، بنابراین:

$$r = \left(\frac{1}{2}\right) . \alpha . \sigma^2$$

هر چه α بیشتر باشد یا به عبارتی فرد ریسک گریزتر باشد، منحنی‌های بی‌تفاوتی شیب بیشتری خواهند داشت و هر چه α به سمت صفر نزدیکتر شود؛ به معنای آن است که فرد ریسک‌گریزی کمتری دارد.

هر سرمایه‌گذار به دنبال حداکثر کردن مطلوبیت است. در مساله قبل سبد بهینه تمامی سرمایه‌گذاران را رسم نمودیم که هم شامل سبدهای بهینه سرمایه‌گذاران ریسک گریز بود و هم شامل سبدهای بهینه سرمایه‌گذاران ریسک‌پذیر.

برای بدست آوردن سبد بهینه مربوط به سرمایه‌گذاران که منحنی‌های بی‌تفاوتی آنها از رابطه $U = r - \frac{1}{2}\alpha\sigma^2$ پیروی می‌کند، باید طبق شکل ۳۰-۱۳ بیشترین مطلوبیت را برای فرد بدست آوریم بطوری که شامل منحنی مرز کار نیز باشد.



شکل ۳۰-۱۳ منحنی مرز کارا به همراه منحنی‌های بی‌تفاوتی

U_1، U_2 و U_3 منحنی مرزکار را قطع می‌کنند. اما بالاترین آنها که بیشترین مطلوبیت را فراهم کند U_3 است که بر منحنی مماس است. اگرچه U_4 نسبت به U_3 مطلوبیت بیشتری دارد، اما منحنی مرز کارا را قطع نمی‌کند. بنابراین U_3 منحنی بهینه و نقطه مماس بر آن، سبد بهینه این سرمایه‌گذار می‌باشد.

بدست آوردن سبد بهینه در نقطه‌ی مماس مربوط به منحنی U_3:

تابع مطلوبیت باید ماکزیمم شود، با این شرط U_4 انتخاب می‌شود. اما باید تابع مطلوبیت طوری ماکزیمم شود که شامل منحنی مرز کارا نیز باشد. (منحنی مرز کارا را قطع کند)

بنابراین $w^T.1 = 1$ و $w \geq 0$

مدل نهایی بصورت زیر است:

$$\begin{array}{lcl} \max\ U & & \max\ r - \frac{1}{2}\alpha\sigma^2 \\ s.t: & \rightarrow & s.t: \\ w^T.1 = 1 & & w^T.1 = 1 \\ w \geq 0 & & w \geq 0 \end{array}$$

$$\max\ w^{T}.\bar{R} - \frac{1}{2}\alpha.w^{T}.\sum.w$$

$$s.t:$$
$$w^{T}.1 = 1$$
$$w \geq 0$$

بعد از بهینه‌سازی و حل مدل فوق، وزن‌های بهینه نقطه مماس بدست می‌اید. از طرفی جهت رسم منحنی بی‌تفاوتی در نقطه مماس، از مقدار بهینه تابع هدف استفاده خواهیم کرد.

مثال: با توجه به داده‌های مساله قبل، منحنی بی‌تفاوتی و وزن‌های بهینه سرمایه‌گذار با سطح ریسک گریزی $\alpha=2$ را بدست آورید.

اطلاعات در کاربرگ indifference curve از فایل portfolio قرار دارد.

سلول B2 را به عنوان ضریب α در نظر می‌گیریم و آن را alpha می‌نامیم. سلول‌های E1:E3 را به عنوان وزن‌های بهینه در نظر می‌گیریم و محدوده E1:E3 را wic می‌نامیم.

میانگین بازده‌های تاریخی دارایی‌ها به نام return و ماتریس واریانس کواریانس به نام sigma در مساله قبل نام‌گذاری شده است. (اطلاعات آن در کاربرگ efficient frontier وجود دارد)

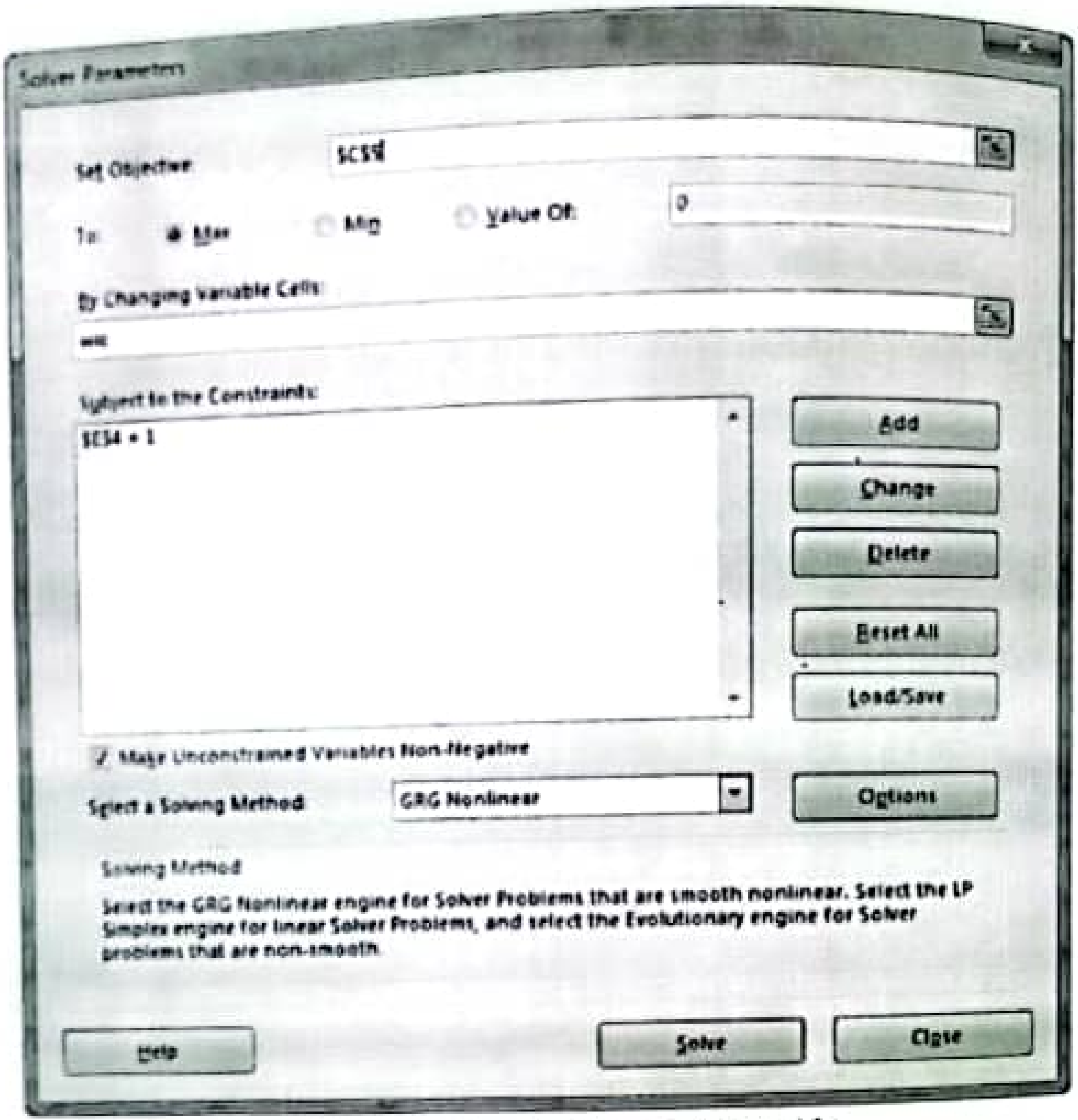
تابع هدف را در سلول C5 به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

```
= SUMPRODUCT(wic; return) − (alpha/2)
      * MMULT(MMULT(TRANSPOSE(wic); sigma); wic)
```

با توجه به اینکه فرمول فوق از جنس آرایه می‌باشد، کلیدهای ترکیبی ctrl+shift را نگه داشته و کلید Enter را می‌فشاریم.

جمع وزن‌ها را در سلول E4 بصورت SUM(wic) تعریف می‌کنیم.

در پنجره solver مدل را به صورت زیر وارد می‌کنیم. (شکل ۳۱-۱۳)



شکل ۳۱-۱۳ پنجره solver جهت ورود اطلاعات مدل

و گزینه solve را انتخاب می‌کنیم.

وزن‌های بهینه به صورت زیر بدست می‌آید. (شکل ۳۲-۱۳)

	A	B	C	D	E
1				w1	0.907534
2	α	2		w2	0.092467
3				w3	0
4					1
5		objective	0.0930552		
6					

شکل ۳۲-۱۳ وزن‌های بهینه

که در واقع وزن‌های سبد بهینه سرمایه‌گذار با سطح ریسک گریزی $\alpha=2$ می‌باشد

ریسک و بازده:

در سلول C7 ریسک را به صورت جذر واریانس یعنی $\sqrt{w^T.\Sigma.w}$ می‌نویسیم

= SQRT(MMULT(MMULT(TRANSPOSE(wic); sigma); wic))

با توجه به آرایه بودن فرمول فوق، کلیدهای ترکیبی ctrl+shift را نگه داشته و سپس کلید Enter را می‌فشاریم که مقدار آن برابر با ۰.۱۵۳۷ بدست می‌آید.

در سلول C8 نیز بازده سبد در نقطه بهینه برای این سرمایه‌گذار را حساب می‌کنیم

= SUMPRODUCT(wic; return)

که مقدار آن برابر با ۰.۱۱۶۶ بدست می‌آید.

بنابراین این سرمایه‌گذار، باید ریسکی معادل ۱۵.۳٪ را قبول کند تا بتواند با توجه به سطح ریسک گریزی که دارد، بازده‌ای معادل با ۱۱.۷٪ بدست آورد.

۱۳-۳-۲ رسم منحنی مطلوبیت سرمایه‌گذار

همانطور که می‌دانیم برای رسم منحنی بی‌تفاوتی باید آن را روی محور $z=0$ تصویر کنیم. مقدار بهینه تابع هدف برابر با ۰.۰۹۳ بدست آمده است، بنابراین:

$$U = R_p - \frac{1}{2}\alpha\sigma^2 \rightarrow R_p = U + \frac{1}{2}\alpha\sigma^2$$

برای رسم این منحنی باید به ازای ریسک‌های مختلف، R_p را بدست آوریم. ریسک‌های مختلف را همان مقادیر ریسک بهینه شده در کاربرگ efficient frontier در نظر می‌گیریم.

بنابراین ناحیه P9:P14 در کاربرگ efficient frontier را کپی و در ناحیه G5:G10 در کاربرگ indifference curve، paste می‌کنیم. برای اینکه منحنی با اطلاعات بیشتری رسم شود، ۳ مقدار دیگر از ریسک به انتهای داده‌ها اضافه می‌کنیم. در سلول G11 فرمول G10 + 0.02 را نوشته و تا سلول G13 درگ می‌کنیم.

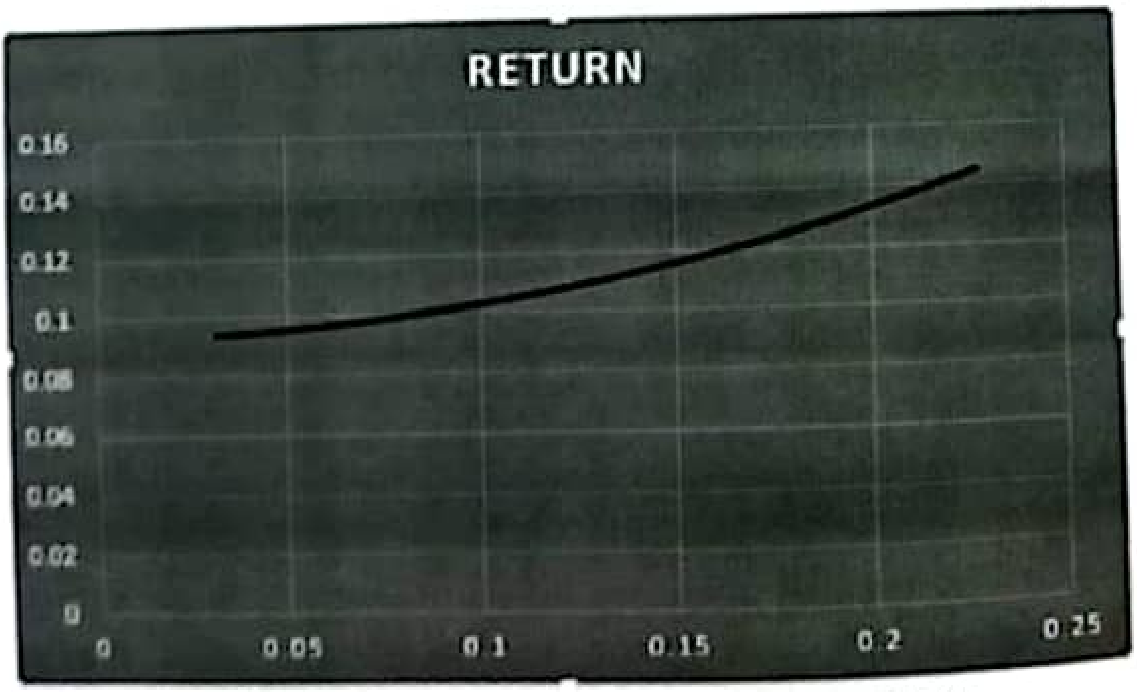
در سلول مقابل G5 یعنی سلول H5 فرمول مربوط به R_p را به صورت زیر می‌نویسیم؛ تا H13 درگ می‌کنیم. (شکل ۳۳-۱۳)

= C5 + (1/2) * alpha * G5^2

	F	G	H	I
3				
4		risk	return	
5		0.0316831	0.094059	
6		0.0450526	0.095085	
7		0.0714669	0.0981627	
8		0.1011787	0.1032924	
9		0.1319804	0.110474	
10		0.1666794	0.1208372	
11		0.1866794	0.1279044	
12		0.2066794	0.1357716	
13		0.2266794	0.1444388	
14				

شکل ۳۳-۱۳ نتایج ریسک و بازده

برای رسم، ناحیه G4:H13 را انتخاب و از منحنی های scatter، منحنی خطی آن را انتخاب می نماییم (شکل ۳۴-۱۳)



شکل ۳۴-۱۳ رسم منحنی بی تفاوتی برای سرمایه گذار با سطح $\alpha = 2$

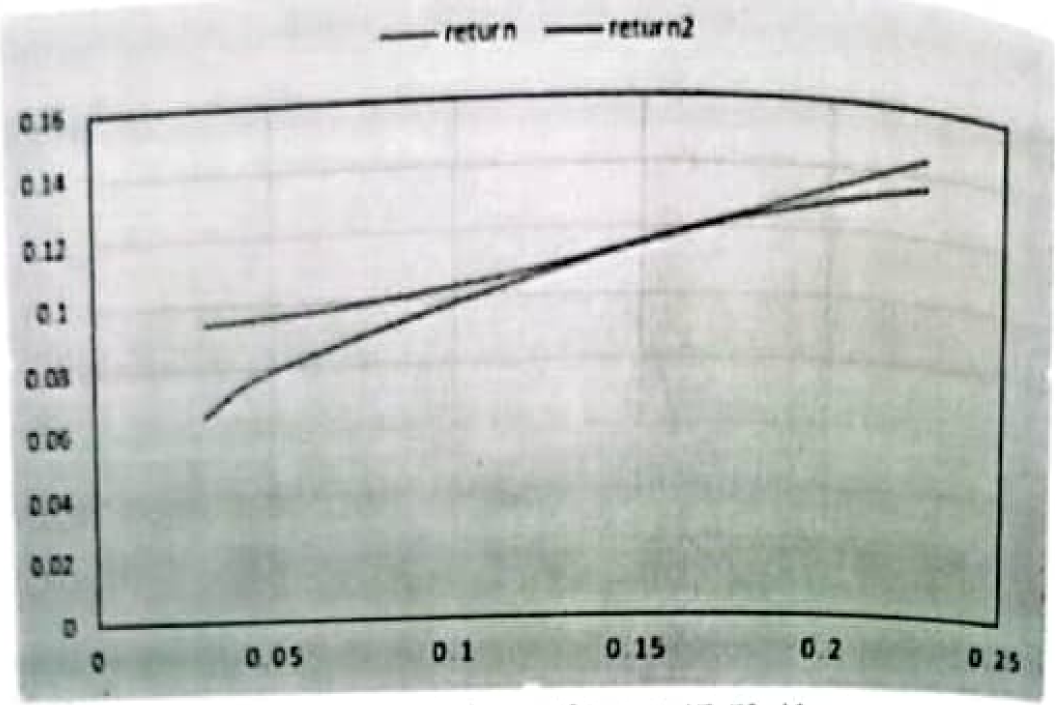
۱۲-۳-۳ رسم منحنی مطلوبیت سرمایه‌گذار به همراه مرز کارا

ستون جدید return2 را در انتها اضافه می‌کنیم که مربوط به بازده‌های منحنی مارکویتز می‌باشد. این مقادیر را از سلول‌های Q9:Q14 کاربرگ efficient frontier کپی کرده و در سلول‌های I5:I10 کاربرگ indifference curve، paste می‌کنیم. معادل با سه داده‌ای که برای ریسک اضافه کرده بودیم، سه داده نیز برای بازده اضافه می‌کنیم. در سلول I11 می‌نویسیم، I10 + 0.005 و سپس تا I13 درگ می‌کنیم تا برای رسم منحنی ترکیبی، داده‌های بیشتری داشته باشیم. (شکل ۳۵-۱۳)

	F	G	H	I
3				
4		risk	return	return2
5		0.0316831	0.094059	0.0656564
6		0.0450526	0.095085	0.0766393
7		0.0714669	0.0981627	0.0876221
8		0.1011787	0.1032924	0.098605
9		0.1319804	0.110474	0.1095878
10		0.1666794	0.1208372	0.1205707
11		0.1866794	0.1279044	0.1255707
12		0.2066794	0.1357716	0.1305707
13		0.2266794	0.1444388	0.1355707
14				

شکل ۳۵-۱۳ داده‌های نهایی جهت رسم منحنی ترکیبی

برای رسم هر دو منحنی مرزکار و مطلوبیت سرمایه‌گذار، مقادیر ناحیه G4:I13 را انتخاب و با استفاده از منحنی‌های scatter، منحنی آن را رسم می‌کنیم. (شکل ۳۶-۱۳)



شکل ۳۶-۱۳ منحنی ترکیبی مرز کارا و منحنی بی‌تفاوتی

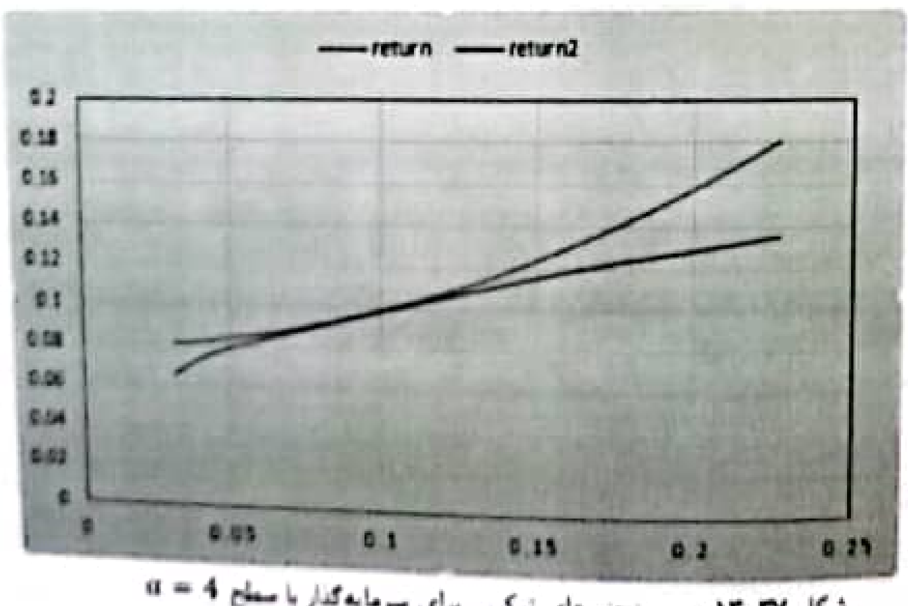
همانطور که بیان شد این سرمایه‌گذار سطح ریسک گریزی برابر با α=2 دارد که نشان دهنده ریسک گریزی پایین می‌باشد. به همین دلیل نقطه مماس در مناطق با ریسک بالا اتفاق افتاده است.

در صورتی که بخواهیم برای سرمایه‌گذاری با α=4 (ریسک گریزتر نسبت به حالت قبل) سبد بهینه بدست آوریم باید:

۱- سلول α را به مقدار ۴ تغییر دهیم.

۲- وزن‌های بهینه را پاک و دوباره با Solver مدل را اجرا نماییم.

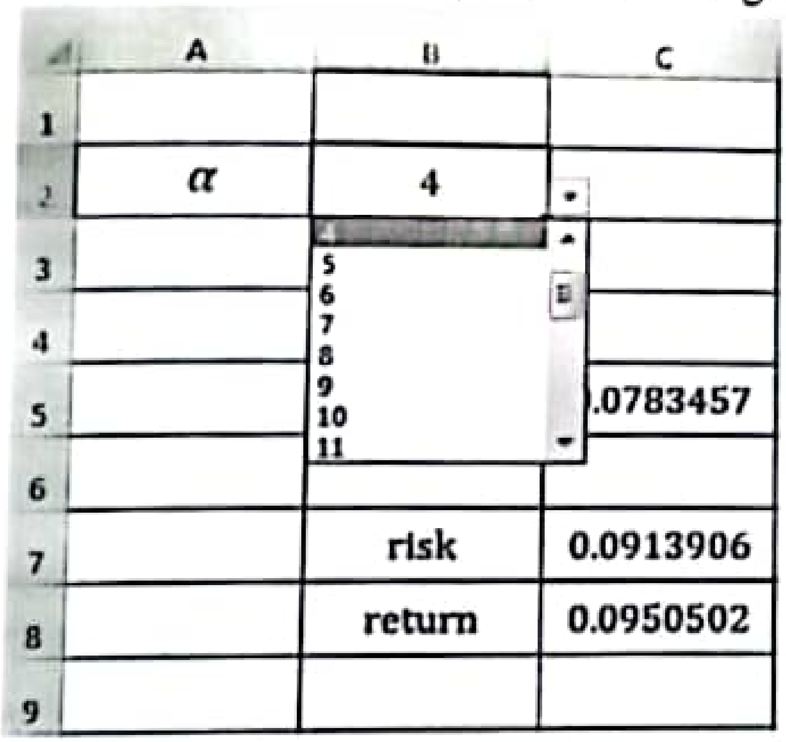
منحنی جدید بصورت شکل ۳۷-۱۳ خواهد بود.



شکل ۳۷-۱۳ رسم منحنی‌های ترکیبی برای سرمایه‌گذار با سطح α = 4

همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، در این حالت (α=4) مماس شدن تابع مطلوبیت و منحنی کارا در سطح پایین‌تر ریسک و بازده اتفاق افتاده است. برای آنکه بتوانیم نمودارهای مذکور را برای تمامی افراد با سطوح مختلف ریسک گریزی مشاهده کنیم، در سلول B2 لیستی از مقادیر مختلف α را با استفاده از مسیر data validation → list ایجاد می‌کنیم.

البته قبل از ایجاد آن، مقادیر مختلف α را در سلول‌های P1:P25 قرار می‌دهیم. نام این ناحیه را alphalist می‌گذاریم. روی سلول B2 قرار گرفته، data validation را انتخاب می‌کنیم. سپس در قسمت source برای لیست کردن، نام alphalist را وارد می‌کنیم تا لیست آلفا را به صورت شکل ۳۸-۱۳ داشته باشیم.



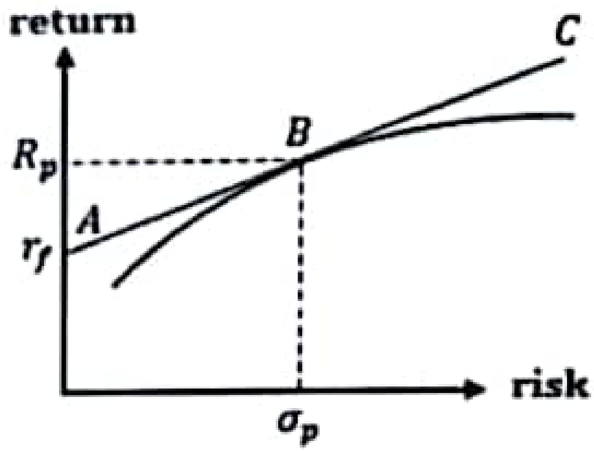
شکل ۳۸-۱۳ ایجاد لیست مقادیر مختلف α

حال با انتخاب آلفای جدید، وزن های قبلی را پاک کرده و solver را یک بار دیگر اجرا می‌کنیم.

۴-۱۳ حالت سوم، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری وقتی درصدی از سرمایه را وام بگیریم یا مبلغی را در بانک سرمایه‌گذاری کنیم.

در این حالت فرد سرمایه‌گذار قصد دارد با نرخ بازدهی r_f (نرخ بازدهی بدون ریسک) مقداری از سرمایه خود را در بانک پس‌انداز کند. در این صورت این فرد یک سرمایه‌گذار با ریسک گریزی بالاست، چرا که می‌خواهد مقداری از سرمایه خود را به دارایی بدون ریسک تخصیص دهد.

در مساله قبل منحنی مرز کارا در حالتی بررسی شد که تمام سرمایه فرد به دارایی ریسکی تخصیص یافت. در صورتی که سرمایه‌گذار درصدی از سرمایه‌اش را به پس‌انداز کردن در بانک اختصاص بدهد (دارایی بدون ریسک)، منحنی مرز کارا (خط AB) به صورت شکل زیر خواهد شد که بر منحنی مرز کارای مساله قبل با سبدهای بهینه ریسکی، مماس است (شکل ۳۹-۱۲)



شکل ۳۹-۱۲ مرز کارا در حالتی که سرمایه‌گذار درصدی از سرمایه‌اش را به پس‌انداز کردن در بانک اختصاص بدهد.

اگر تمام سرمایه فرد در دارائی ریسکی باشد، نقطه‌ی B، سبد بهینه و اگر تمام سرمایه فرد در دارائی غیرریسکی باشد، نقطه‌ی A سبد بهینه خواهد شد. ترکیبات مختلف دارائی ریسکی و دارائی غیرریسکی سبد سرمایه‌گذار روی پاره خط AB خواهد بود.

اگر نرخ بازدهی سبد ریسکی را R_p، بازدهی کل R_c و وزن مربوط به دارائی‌های ریسکی را y بنامیم، داریم:

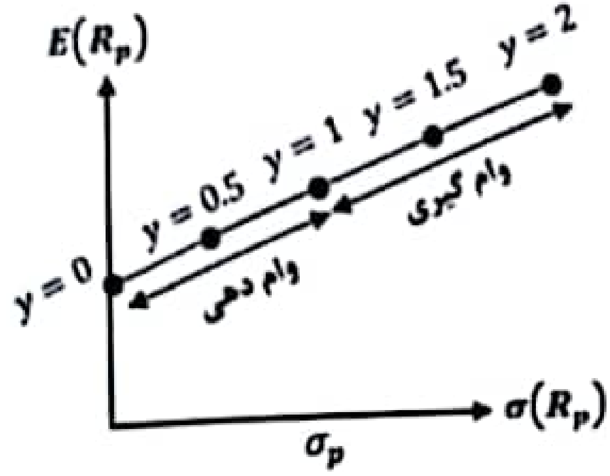
$$R_c = y.R_p + (1-y).r_f$$
$$\begin{cases} \bar{R}_c = y.\bar{R}_p + (1-y).r_f = r_f + y.(\bar{R}_p - r_f) \\ \sigma_c^2 = y^2.\sigma_p^2 \rightarrow \sigma_c = y.\sigma_p \end{cases} \rightarrow \bar{R}_c = r_f + \left(\frac{\bar{R}_p - r_f}{\sigma_p}\right).\sigma_c$$

رابطه فوق در واقع معادله خط بهینه است که شیب آن برابر با $\left(\frac{\bar{R}_p - r_f}{\sigma_p}\right)$ می‌باشد.

نکته: اگر فرد تنها قصد وام دهی داشته باشد، به عبارتی بخواهد درصدی از سرمایه خود را در بانک بگذارد، یعنی فرد ریسک گریز است که تمایل دارد مقداری از سرمایه خود را در دارائی بدون ریسک سرمایه‌گذاری کند که دراین حالت منحنی مرز کارا خط AB خواهد بود و $w \geq 0$ می‌باشد. در صورتی که فرد بخواهد از بانک مبلغی را با نرخ r_f وام بگیرد تا در دارائی ریسکی سرمایه‌گذاری کند، (یعنی فرد ریسک‌پذیر است که حتی حاضر شده از بانک وام بگیرد

تا در دارائی ریسکی سرمایه‌گذاری کند) دراین حالت منحنی مرز کارا خط BC خواهد بود که w می‌تواند منفی نیز باشد، چراکه مبلغی را قرض گرفته‌ایم.

بنابراین در صورتی که فرض نماییم نرخ وام گیری و نرخ وام دهی برابر است، منحنی مرز کارا به صورت زیر خواهد بود. (شکل ۴۰-۱۳)



شکل ۴۰-۱۳ منحنی مرز کارا وقتی نرخ وام گیری و نرخ وام دهی برابر باشد

نکته: در قسمت وام‌گیری $1 < y$، چراکه مقداری پول از بانک وام گرفته‌ایم تا در دارایی ریسکی سرمایه‌گذاری کنیم. در قسمت وام دهی نیز $1 > y$، چراکه می‌خواهیم درصدی از سرمایه را در بانک پس‌انداز کنیم.

مثال: در حالت وام‌گیری فرض کنید فردی ۱،۰۰۰،۰۰۰ واحد پولی سرمایه دارد و می‌خواهد ۳۰۰،۰۰۰ واحد پولی هم برای تشکیل سبد وام بگیرد. در این حالت:

$$y = \frac{1{,}3000{,}000}{1{,}000{,}000} = 1.3 \text{ یا } 130\% \quad \rightarrow \quad 1 - y = -30\%$$

که این درصد منفی به معنای موقعیت استقراضی در دارایی بدون ریسک می‌باشد. بنابراین در مدل‌سازی آن نباید محدودیت وزن‌های مثبت را در نظر بگیریم.

مثال: در حالت وام دهی، فرض کنید فردی ۱،۰۰۰،۰۰۰ واحد پولی سرمایه دارد و می‌خواهد ۸۰۰،۰۰۰ واحد پولی در دارایی ریسکی و ۲۰۰،۰۰۰ را در بانک پس‌انداز کند. بنابراین:

$$y = \frac{800{,}000}{1{,}000{,}000} = 80\% \quad \rightarrow \quad \acute{y} = 1 - y = 20\%$$

نکته: در صورتی که نرخ وام‌گیری و وام‌دهی را بصورت ثابت برابر با r_p در نظر بگیریم مرزکارا در شرایط کلی همان خط AC خواهدشد و w_iهـا نیـز علامـت آزاد خواهنـد داشت.

۱۳-۴-۱ Capital Allocation Line

خط AC به خط CAL یا Capital Allocation Line معروف است. ایـن خـط بـازده مـورد انتظار را با توجه به ریسک متحمل شده برای ترکیبات مختلـف دارائـی‌هـای ریـسکی و بـدون ریسک نشان می‌دهد.

Capital Market Line (CML):

حالت خاصی از خط CAL که شامل دارائی‌های ریـسکی بازار مانند شاخص بازار مـی‌باشـد. در حالتی که سبد ریسکی،سبد بازار باشد، خط بهینه، CML خواهد بود.

نکته: شیب خط بهینه‌ی CAL یعنی $\left(\frac{\bar{R}_p - r_f}{\sigma_p}\right)$ به نسبت شارپ[1] معـروف اسـت کـه نـسبت بازدهی به ریسک را نشان می‌دهد.

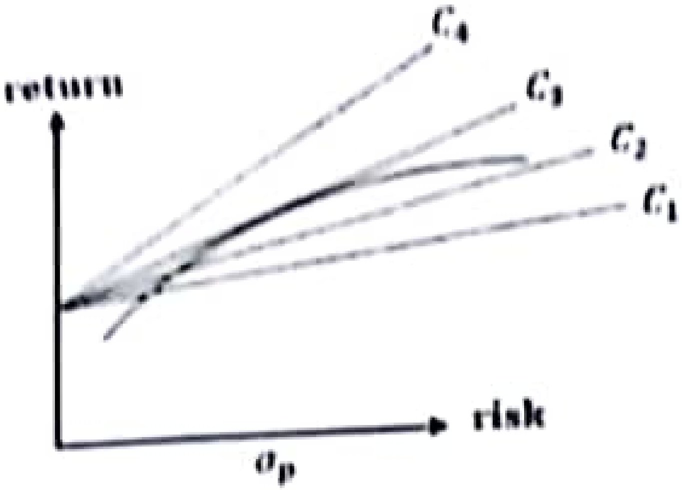
۱۳-۴-۲ بدست آوردن خط بهینه CAL با استفاده از مدل‌سازی شاخص شارپ

می‌دانیم که هر چقدر بازده افزایش و ریـسک کاهش پیدا کند، سرمایه‌گذار مطلوبیـت بیشـتری خواهد داشت. پس هر چه شیب خط CAL (نسبت شارپ)، بیشتر افزایش پیدا کند بهتر است. بنابراین نسبت شارپ را طوری ماکزیمم می‌کنیم که منحنی مرزکارای مساله قبل (دارائی‌هـای ریسکی) را قطع کند. چرا که خط CAL شامل دارایی ریـسکی نیز می‌باشد.

نمودار شکل ۴۱-۱۳ را در نظر بگیرید.

---

1. Sharpe Ratio



شکل ۲۱-۱۳ ماکزیمم سازی شاخص شارپ

در نمودار فوق خط‌های G_1، G_2 و G_3 منحنی مرز کارای ریسکی را قطع کرده‌اند. اما G_3 شاخص شارپ بالاتری دارد. G_4 هم که منحنی را قطع نکرده است. بنابراین باید جهت بدست اوردن خط CAL، شاخص شارپ را ماکزیمم نماییم، به طوری که محدودیت‌های سبد ریسکی نیز در نظر گرفته شود.

بنابراین مدل کلی به صورت زیر است:

$$\max \quad \frac{w^T . R - r_f}{\sqrt{(w^T . \Sigma . w)}}$$

s.t :

$AX = b$

$CX \geq d$

ماکزیمم سازی شاخص شارپ باعث می‌شود تا خط بهینه CAL که بر منحنی ریسکی مماس است، بدست آید. در صورتی که نقطه مماس[1] بدست آید، با استفاده از نقطه (ریسک صفر و بازدهی r_f) می‌توانیم معادله خط CAL را بنویسیم و این خط بهینه را رسم نماییم. بنابراین از مدل فوق جهت بدست آوردن نقطه مماس استفاده می‌کنیم، یعنی

شاخص شارپ باید با شرایط نقطه مماس (نقطه با دارایی‌های ریسکی یا $y=1$) ماکزیمم شود تا ریسک و بازده این نقطه بدست آید.

[1] Tangency Port[illegible]

این مدل به سادگی قابل حل نیست. اگرچه محدودیت‌های مساله خطی است اما تابع هدف مساله بسیار پیچیده است. چراکه مخرج آن غیرخطی می‌باشد که نشان دهنده آن است که مدل محدب نمی‌باشد.

در نتیجه برای این مدل، دو محدودیت به صورت زیر در نظر می‌گیریم و سپس با استفاده از تغییر متغیر، مدل را به یک مساله کوادراتیک تبدیل و حل می‌کنیم.

۱. $w^T.1 = 1$ (جمع وزن‌ها برابر با ۱ باشد)

چراکه می‌خواهیم نقطه مماس را بدست آوریم که این نقطه، سبد کاملا ریسکی می‌باشد و طبق مدل‌های گذشته جمع وزن‌ها باید برابر با یک باشد.

۲. وزن‌های بهینه‌ای وجود داشته باشند که رابطه زیر برقرار باشد:

$$w^T.R > r_f$$

چرا که اگر تمامی سبدهای شدنی بازده مورد انتظاری کمتر از r_f داشته باشند، دیگر نیازی به بهینه‌سازی نمی‌باشد و نرخ بازده بدون ریسک بر سایر بازده ها ارجحیت دارد.

تبدیل مدل به یک مدل قابل حل و ساده‌تر

ابتدا تبدیلی به صورت زیر انجام می‌دهیم:

$$w^T.R - r_f > 0 \xRightarrow{\text{ماتریس واحد :1}} (R - r_f.1)^T.w > 0$$

همچنین تغییر متغیری را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$k = \frac{1}{(R - r_f.1)^T.w} \quad , \quad x = k.w \quad k > 0$$

داریم:

$$w^T.\sum.w = \frac{1}{k^2}\left(x^T.\sum.x\right) \rightarrow \sqrt{w^T.\sum.w} = \frac{1}{k}\left(\sqrt{x^T.\sum.x}\right)$$

$$(R - r_f.1)^T.x = 1 \rightarrow (R - r_f.1)^T.w = \frac{1}{k}$$

$$\sum w_i = 1 \rightarrow \sum \frac{x}{k} = 1 \rightarrow \sum x_i = k$$

در نتیجه مدل مساله به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\max \frac{1}{\sqrt{x^T.\sum.x}}$$

st:

$$(R - r_f.1)^T.x = 1$$

با

$$x^T.1 = k$$
$$k > 0$$

$$\min x^T.\sum.x$$

st:
$$(R - r_f.1)^T.x = 1$$
$$x^T.1 - k = 0$$
$$k > 0$$

همانطور که میدانیم مینیمم سازی $\sqrt{x^T.\sum.x}$ با مینیمم سازی $x^T.\sum.x$ معادل است مدل فوق ۴ متغیر دارد که ۳ متغیر مربوط به x می‌باشد و یک متغیر هم k نام‌گذاری کرده‌ایم جهت در نظرگرفتن متغیر k در متغیرها، بردار x در تابع هدف را به صورت $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ k \end{pmatrix}$ در نظر می‌گیریم. در این صورت ماتریس واریانس کواریانس که یک ماتریس 4×4 می‌باشد، به صورت زیر خواهد بود تا خروجی $x^T.\sum.x$ همان نتیجه مربوط به سه متغیر x را بدهد (شکل ۴۲-۱۳)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2			ra	rb	rc	k	
3		ra	0.02770202	0.00386556	0.00020703	0	
4		rb	0.00386556	0.01112139	-0.0001953	0	
5		rc	0.00020703	-0.0001953	0.001154	0	
6		k	0	0	0	0	
7							

شکل ۴۲-۱۳ ماتریس واریانس کواریانس برای هر چهار متغیر

اطلاعات مربوط به این مساله در فایل portfolio، کاربرگ sharpe ratio قرار دارد. ناحیه C3:F6 را mvc نام‌گذاری می‌کنیم و سلول‌های I1:I4 را به عنوان متغیرهای مساله به صورت زیر در نظر می‌گیریم. (شکل ۴۳-۱۳)

	G	H	I
1		x1	
2		x2	
3		x3	
4		k	
5			

شکل ۴۳-۱۳ متغیرهای مساله

ناحیه I1:I4 را wsharpe و ناحیه I1:I3 را xsharpe نام‌گذاری می‌کنیم.

درسلول H7 تابع هدف را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

= MMULT(MMULT(TRANSPOSE(wsharpe); mvc); wsharpe)

در انتها کلیدهای ترکیبی ctrl+shift را نگه داشته و سپس کلید Enter را می‌فشاریم.

وارد کردن محدودیت‌ها:

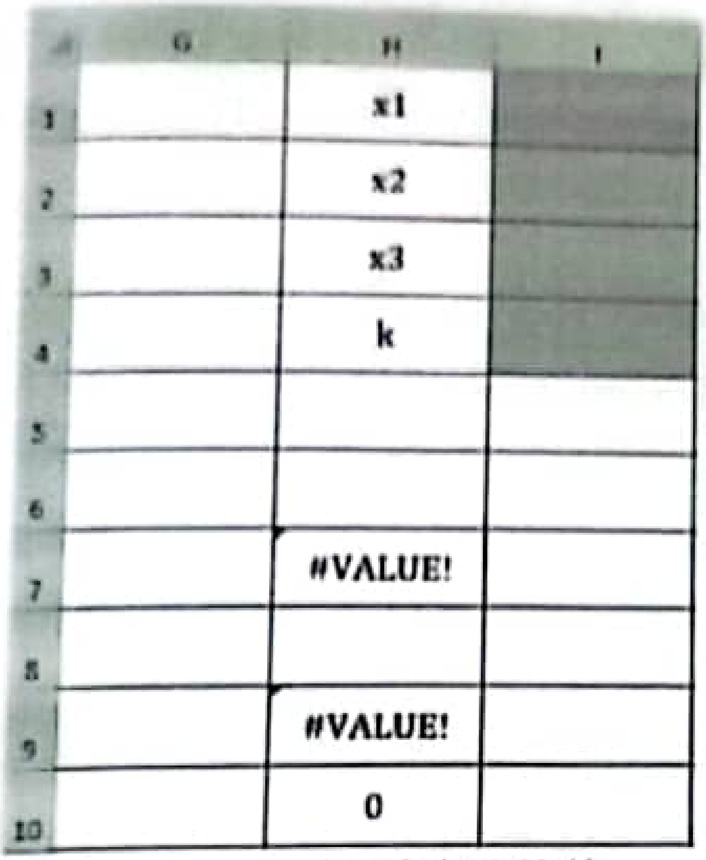
مقادیر متوسط بازده‌های تاریخی در ناحیه B8:B10 وجود دارد. مقدار r_f را برابر با ۰.۰۴۵ در نظر می‌گیریم و در سلول B11 قرار می‌دهیم.

در سلول D8 فرمول `B8 − $B$11` را نوشته و تا D10 درگ می‌کنیم تا مقادیر $(R - r_f.1)$ بدست آید. به منظور محاسبه $(R - r_f.1)^T.x$ در سلول H9 داریم:

= MMULT(TRANSPOSE(D8: D10); xsharpe)

برای لحاظ کردن محدودیت دوم، فرمول زیر را در سلول H10 وارد می‌کنیم:

= SUM(xsharpe) − I4



شکل ۴۴-۱۳ وارد کردن تابع هدف و محدودیت‌ها

برنامه solver را اجرا می‌کنیم:

H7 : set objective

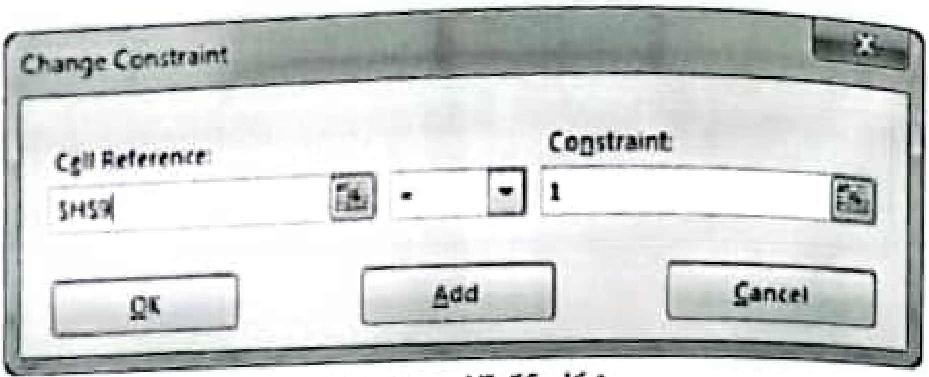
min : to

wsharpe : by changing variable cells

برای وارد کردن محدودیت‌ها از قسمت subject to the constraints گزینه add را انتخاب می‌کنیم.

هر دو محدودیت را به صورت زیر وارد می‌کنیم. (شکل ۴۵-۱۳ و ۴۶-۱۳)

شکل ۴۵-۱۳ محدودیت اول



شکل ۴۶-۱۳ محدودیت دوم

تیک مثبت بودن کلیه متغیرها را به حالت انتخاب در می‌آوریم.

بدین ترتیب نتایج به صورت زیر بدست می‌آیند. (شکل ۴۷-۱۳)

	G	H	I
1		x1	4.15273512
2		x2	4.61989315
3		x3	29.1491289
4		k	37.9217572
5			
6			
7		1.84284074	
8			
9		1.00000004	
10		0	
11			

شکل ۴۷-۱۳ نتایج حل مدل

بنابراین وزن‌های بهینه در سلول‌های K1:K3 بصورت $\frac{x}{k}$ بدست می‌آیند.

w_1	w_2	w_3
۰,۱۰۹	۰,۱۲۱	۰,۷۶۸

با توجه به رابطه $w^T.\sum.w = \left(\frac{1}{k^2}\right).x^T.\sum.x$ در صورتی که تابع هدف را بر k^2 تقسیم کنیم، واریانس سبد در نقطه‌ی مماس بدست می‌آید که با جذر گرفتن از آن، ریسک سبد بدست می‌آید.
در سلول L7 فرمول مربوط به محاسبه واریانس را به صورت زیر می‌نویسیم.

= H7/(I4^2)

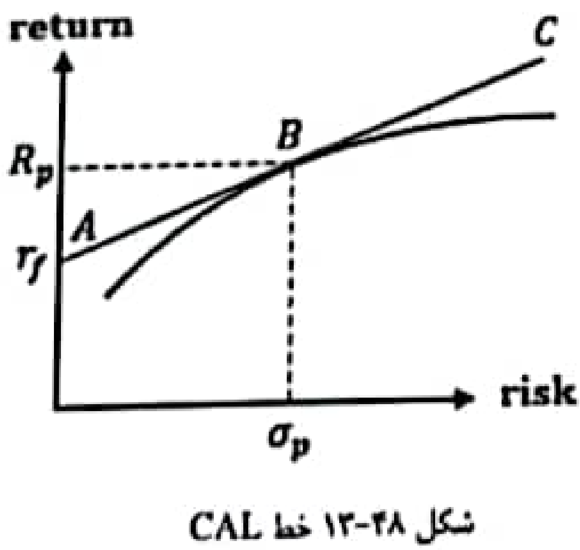
در سلول L8 نیز با استفاده از تابع SQRT از سلول L7 جذر می‌گیریم تا ریسک در نقطه مماس بدست آید.
مقدار واریانس برابر با ۰٫۰۰۱۲۸ و مقدار ریسک برابر با ۰٫۰۳۵۷ بدست می‌اید.
بازده سبد نیز مشابه مدل‌های قبلی محاسبه می‌شود.

SUMPRODUCT(return; K1: K3)

که مقدار آن ۰٫۰۷۱۳می شود.

۱۳-۴-۳ ترسیم خط بهینه با استفاده از نسبت شارپ

جهت رسم خط CAL دو نقطه A و B را در شکل ۴۸-۱۳ در نظر بگیرید.



شکل ۴۸-۱۳ خط CAL

مختصات نقطه A به صورت $A: \begin{pmatrix} 0 \\ 0.0450 \end{pmatrix}$ و مختصات نقطه B به صورت $B: \begin{pmatrix} 0.0357 \\ 0.0713 \end{pmatrix}$ می‌باشد. بنابراین با استفاده از این دو نقطه، شیب خط را در سلول L10 به صورت زیر بدست می‌آوریم:

$$m = \frac{0.0713 - 0.0450}{0.0357 - 0} = 0.7366$$

بنابراین با توجه به مقادیر مختلف ریسک، بازده را بدست می‌آوریم. توجه شود با توجه به آنکه خط CAL از نقطه‌ای با ریسک صفر شروع می‌شود، بهتر است برای رسم نمودار مقادیری کمتر از حداقل ریسک (۰.۰۳۱) را نیز در نظر بگیریم. بنابراین کلیه داده‌ها برای رسم به صورت شکل ۴۹-۱۳ می‌باشد.

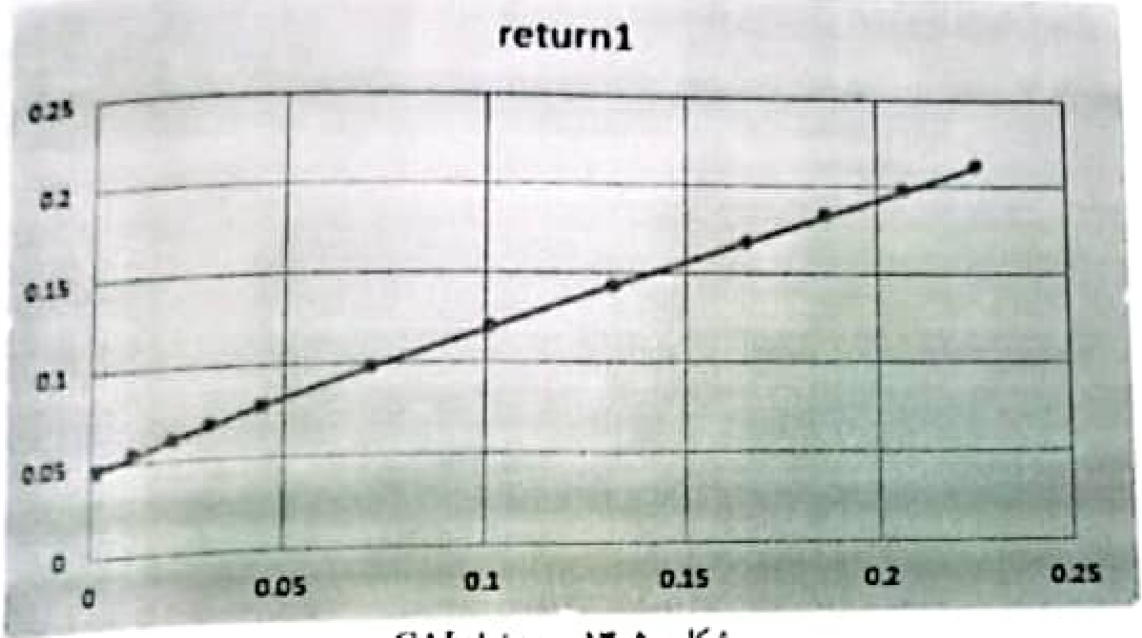
	E	F	G	H
		risk	return1	
11		0.0016831	0.0462398	
12		0.0116831	0.0536062	
13		0.0216831	0.0609727	
14		0.0316831	0.0683391	
15		0.0450526	0.0781876	
16		0.0714669	0.0976455	
17		0.1011787	0.1195324	
18		0.1319804	0.1422222	
19		0.1666794	0.1677829	
20		0.1866794	0.1825158	
21		0.2066794	0.1972486	
22		0.2266794	0.2119814	
23				

شکل ۴۹-۱۳ داده های ریسک و بازده برای رسم

در سلول G12 فرمول مربوط به معادله خط به صورت زیر را نوشته و تا G23 درگ می‌کنیم.

= B11 + L10 * F12

ناحیه F11:G23 را انتخاب و با استفاده از منحنی‌های scatter منحنی آن را رسم می‌کنیم. (شکل ۵۰-۱۳)



شکل ۵۰-۱۳ رسم خط CAL

۱۳-۴-۴ رسم منحنی ترکیبی مرز کارای ریسکی و خط بهینه CAL

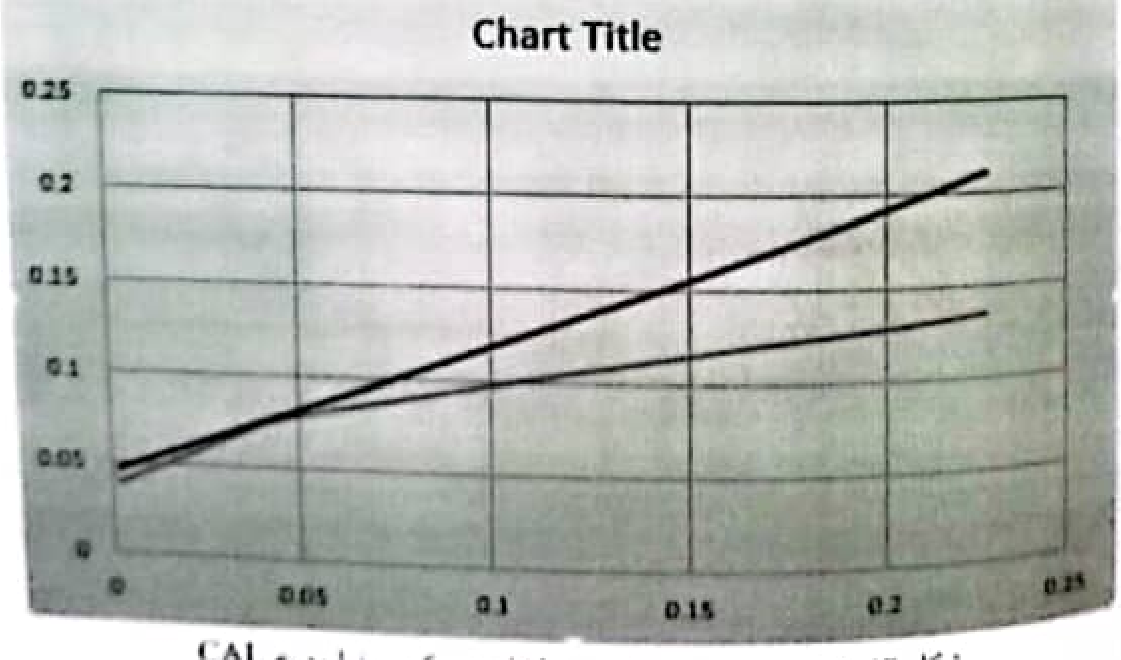
برای این منظور از داده‌های شکل ۴۹-۱۳ استفاده می‌کنیم. بنابراین مقادیر بازده I5:I13 مربوط به کاربرگ indifference curve را کپی و در سلول‌های H15:H23، کاربرگ sharpe ratio، paste می‌کنیم.

با توجه به اینکه در این مساله سه مقدار کمتر از حداقل ریسک را برای رسم منحنی، به داده‌ها اضافه کردیم، سه مقدار بازده معادل با سه مقدار ریسک، نیز به داده‌ها اضافه می‌کنیم تا منحنی را رسم کنیم. بنابراین داده‌های نهایی به صورت زیر بدست می‌آید. (شکل ۵۱-۱۳)

	E	F	G	H
11		risk	return1	return2
12		0.0016831	0.0462398	0.0386564
13		0.0116831	0.0536062	0.0476564
14		0.0216831	0.0609727	0.0566564
15		0.0316831	0.0683391	0.0656564
16		0.0450526	0.0781876	0.0766393
17		0.0714669	0.0976455	0.0876221
18		0.1011787	0.1195324	0.098605
19		0.1319804	0.1422222	0.1095878
20		0.1666794	0.1677829	0.1205707
21		0.1866794	0.1825158	0.1255707
22		0.2066794	0.1972486	0.1305707
23		0.2266794	0.2119814	0.1355707

شکل ۱۳-۵۱ داده های نهایی برای رسم منحنی ترکیبی مرز کارای ریسکی و خط بهینه CAL

ناحیه F11:H23 را انتخاب و منحنی خطی آن را از قسمت scatter رسم می کنیم (شکل ۱۳-۵۲)

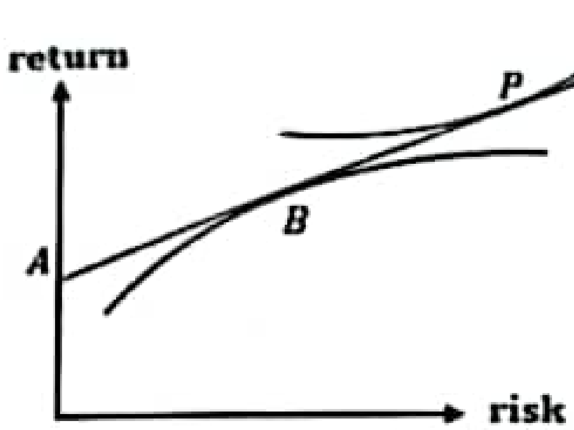


شکل ۱۳-۵۲ رسم منحنی ترکیبی مرز کارای ریسکی و خط بهینه CAL

نقطه مماس که مختصات ریسک و بازده آن را بدست آوردیم، در منحنی مشخص است.

۱۳-۵ حالت چهارم، بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری با درنظر گرفتن تابع مطلوبیت و منحنی‌های بی‌تفاوتی در حالتی که سرمایه‌گذار هم قادر به وام‌گیری و وام‌دهی باشد

دراین حالت خط بهینه مربوط به سبد بهینه، خط AC است که برای این سرمایه‌گذار با ضریب α ، نقطه بهینه مماس، نقطه P بدست می‌آید. (شکل ۱۳-۵۳)



شکل ۱۳-۵۳ منحنی CAL به همراه منحنی بی‌تفاوتی

نقطه P مربوط به سبد بهینه یک سرمایه‌گذار با ضریب ریسک گریزی α خواهد بود که دقیقا مماس بین منحنی مرز کارا (خط CAL) و ماکزیمم تابع مطلوبیت سرمایه‌گذار می‌باشد همانطور که در مدل قبل بررسی شد، نقطه مماس، بازدهی معادل زیر خواهد داشت.

$$w^T.(R - r_f.1)$$

بنابراین بازده مربوط به خط CAL به اندازه r_f نسبت به مبدا بیشتر است.

$$\mu = r_f + w^T.(R - r_f.1)$$

۱۳-۵-۱ بدست آوردن تابع مطلوبیت بهینه

همانطور که قبلا بررسی شد، مدل کلی بهینه سازی تابع مطلوبیت به صورت زیر می باشد

$$\begin{cases} \max\ U \\ w^T.1 = 1 \\ w \geq 0 \end{cases} \xRightarrow{\text{تابع مطلوبیت } U} \begin{cases} \max\ \ r_p - \left(\frac{1}{2}\right).\alpha.\sigma_p^2 \\ w^T.1 = 1 \\ w \geq 0 \end{cases}$$

با توجه به اینکه خط بهینه، خط CAL می‌باشد، بنابراین بازده و ریسک مربوط به خط CAL را در رابطه قرار می‌دهیم:

$$\max\left(r_f + w^T.(R - r_f.1) - \left(\frac{1}{2}\right).\alpha.w^T.\sum.w\right)$$

این مدل محدودیتی ندارد، چرا که وزن‌ها می‌توانند منفی باشند و با توجه به اینکه هر دو شرایط وام‌گیری و وام‌دهی را در نظر گرفتیم، جمع وزن‌ها می‌تواند ۱ نباشد

مثال: در صورتی که سطح ریسک گریزی فردی برابر با ۵ باشد $(\alpha = 5)$، سبد بهینه آن را با توجه به شرایط مساله قبل بدست آورید. اطلاعات در کاربرگ utility قرار دارد

مقادیر وزن‌ها در سلول‌های E1:E3 قرار دارد. این ناحیه را w_utility می‌نامیم

در سلول B2 مقادیر مختلف α را مشابه کاربرگ indifference curve لیست می‌کنیم. نام سلول B2 را alpha_u می‌نامیم.

مقدار r_f را در سلول B3 قرار داده و نام این سلول را rf می‌نامیم. مقادیر میانگین بازده‌های تاریخی نیز قبلا return نام‌گذاری شده‌اند.

ستون $(R - r_f.1)$ را به صورت آرایه‌ای بدست می‌آوریم. ابتدا ناحیه C5:C7 را انتخاب و سپس فرمول زیر را می‌نویسیم:

= return − rf

در نهایت کلیدهای ترکیبی ctrl+shift را نگه داشته و کلید Enter را می‌فشاریم.

نام ناحیه C5:C7 را r_return می‌گذاریم.

	A	B	C	D	E
1				w1	
2	α	5		w2	
3	rf	0.045		w3	
4					
5			0.075571		
6			0.033502		
7			0.01823		
8					

شکل ۵۴-۱۳ ورود عناصر اولیه مدل بهینه‌سازی

تابع هدف مساله را در سلول F5 به صورت زیر تعریف می‌کنیم

= rf + MMULT(TRANSPOSE(w_utility); r_return) − (alpha_u/2) * MMULT(MMULT(TRANSPOSE(w_utility); sigma); w_utility)

پس از باز کردن برنامه solver، مدل را در حالت ماکزیمم قرار داده و سلول F5 را در قسمت set objective وارد می‌کنیم. در قسمت متغیرها نیز w_utility را وارد می‌کنیم.

دقت شود مثبت بودن متغیرها را تایید نکنیم.

بعد از بهینه‌سازی، مقدار تابع هدف (برای $\alpha = 5$) مقداری برابر با ۰.۰۹۹۲ بدست می‌آید. وزن‌های بهینه نیز به صورت زیر می‌باشند. (شکل ۵۵-۱۳)

	A	B	C	D	E	F
1				w1	0.450688	
2	α	5		w2	0.501389	
3	rf	0.045		w3	3.163498	
4						
5			0.075571		objective	0.099264
6			0.033502			
7			0.01823			

شکل ۵۵-۱۳ وزن‌های بهینه مدل بهینه‌سازی

سلول F6 را به عنوان return در نظر می‌گیریم و فرمول زیر را در آن می‌نویسیم:

= rf + MMULT(TRANSPOSE(w_utility); r_return)

که مقدار آن برابر با ۰.۱۵۳۵ می‌شود.

و در سلول F7 واریانس را محاسبه می‌کنیم:

= MMULT(MMULT(TRANSPOSE(w_utility); sigma); w_utility)

که مقدار آن برابر با ۰.۰۲۱۷ بدست می‌آید.

مقدار ریسک را نیز با جذر گرفتن از واریانس در سلول F8 بدست می‌آوریم.

مقدار بهینه تابع هدف، مقدار U می‌باشد.

$$U = R_p - \frac{1}{2}\alpha\sigma^2 \rightarrow R_p = U + \frac{1}{2}\alpha\sigma^2$$

۱۳-۵-۲ رسم منحنی ترکیبی مرز کارای بهینه CAL، مرز کارای سبد ریسکی و منحنی بی‌تفاوتی

داده‌های مربوط به رسم منحنی بی‌تفاوتی و خط بهینه CAL (ناحیه F11:H23) را از کاربرگ sharpe ratio کپی و در سلول D10 کاربرگ utility، paste می‌کنیم.

در سلول G11 فرمول مربوط به محاسبه بازده مدل فوق را با استفاده از رابطه $R_p = U + \frac{1}{2}\alpha\sigma^2$ به صورت زیر می‌نویسیم:

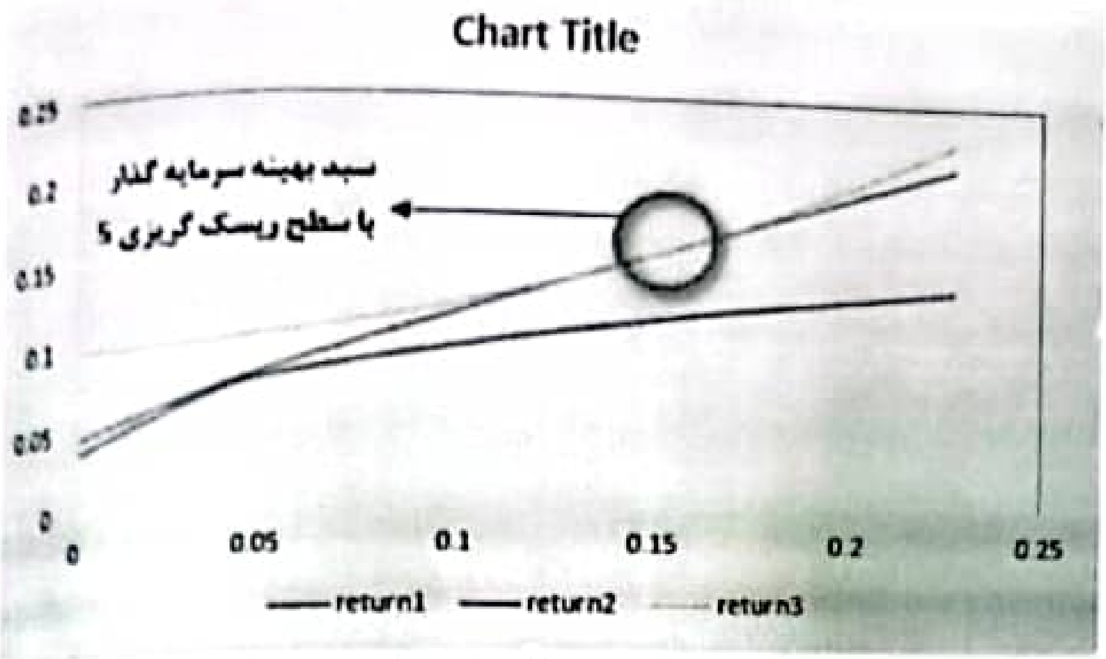
```
$F$5 + (1/2) * alpha_u * (D11^2)
```

سلول فوق را تا سلول G22 درگ کرده تا جدول داده‌های زیر بدست آید. (شکل ۵۶-۱۳)

	C	D	E	F	G
9					
10		risk	return1	return2	return3
11		0.001683	0.04624	0.038656	0.099271
12		0.011683	0.053606	0.047656	0.099605
13		0.021683	0.060973	0.056656	0.100439
14		0.031683	0.068339	0.065656	0.101774
15		0.045053	0.078188	0.076639	0.104338
16		0.071467	0.097645	0.087622	0.112033
17		0.101179	0.119532	0.098605	0.124857
18		0.13198	0.142222	0.109588	0.142811
19		0.166679	0.167783	0.120571	0.168719
20		0.186679	0.182516	0.125571	0.186387
21		0.206679	0.197249	0.130571	0.206055
22		0.226679	0.211981	0.135571	0.227723

شکل ۵۶-۱۳ داده‌های نهایی جهت رسم منحنی ترکیبی مرز کارای بهینه CAL، مرز کارای سبد ریسکی و منحنی بی‌تفاوتی

ناحیه D10:G22 را انتخاب و منحنی ترکیبی را رسم می‌کنیم. (شکل ۵۷-۱۳)



شکل ۵۷-۱۳ منحنی ترکیبی مرز کارای بهینه CAL، مرز کارای سبد ریسکی و منحنی بی‌تفاوتی

مقادیر بهینه سرمایه‌گذار با۵= α برابر است با:

w_1	w_2	w_3	risk	return
۰.۴۵	۰.۵	۳.۱۶۳	۰.۱۴۷	۰.۱۵۳

در سلول G1 نیز، فرمول $100 * \left(۱ - \text{SUM(w\_utility)}\right)$ را می‌نویسیم.

۳-۵-۱۳ تحلیل شرایط سرمایه‌گذار

همانطور که مشاهده می‌شود در حالتی α=5 است فرد سرمایه‌گذار ریسک پذیرتر است یا به عبارتی ریسک‌گریزی کمتری دارد که به دو دلیل زیر می‌باشد:

۱- نقطه بهینه‌ی سبد سرمایه‌گذاری روی خط BC بدست آمده است؛ یعنی فرد تمایل دارد مقداری پول از بانک وام بگیرد و در سبد ریسکی سرمایه‌گذاری کند.

۲- $w_3 > 100\%$ یعنی درصدی از سرمایه را از بانک وام گرفته است.

$$1 - (w_1 + w_2 + w_3) = -311\%$$

یعنی ۳۱۱٪ از سرمایه اولیه را از بانک وام گرفته است.

به عنوان مثال، اگر ۱،۰۰۰،۰۰۰ سرمایه داشته باشد، مبلغ ۳،۱۱۰،۰۰۰ نیز وام می‌گیرد، مجموعا۴،۱۱۰،۰۰۰ را در دارائی‌های ریسکی سرمایه‌گذاری کند.

همانطور که می‌دانیم هر چه مقدار α بزرگتر باشد فرد ریسک گریزتر است و سبد بهینه به سمت خط AB حرکت می‌کند.

مادامی که سلول G1 منفی باشد، شخص ریسک‌پذیر است و سبد بهینه در ناحیه BC قرار می‌گیرد در صورتی که به ازاء هر α سلول G1 مثبت شد، یعنی سرمایه‌گذار ریسک‌گریز است و می‌خواهد درصدی از مبلغ سرمایه را در بانک بگذارد و سبد بهینه در ناحیه AB قرار می‌گیرد.

حل مساله برای $\alpha=14$

۱- ابتدا α را به مقدار ۱۴ تغییر می‌دهیم.

۲- وزن های بهینه را پاک می‌کنیم.

۳- Solver را مجددا، اجرا می‌کنیم.

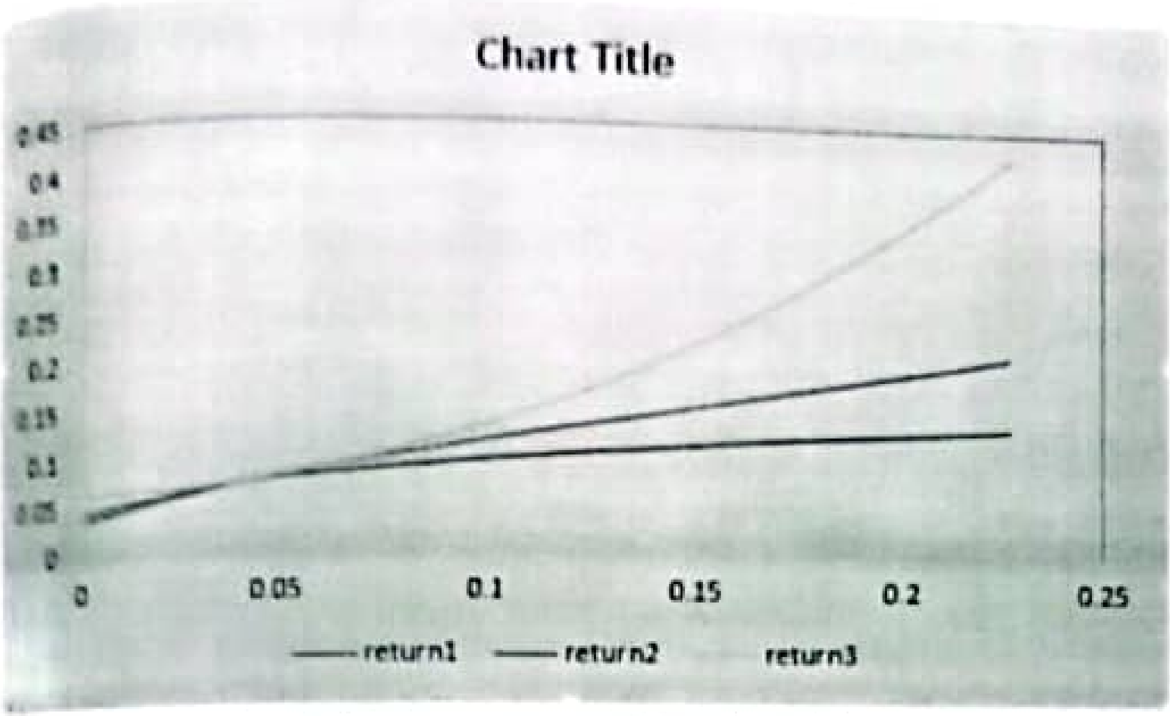
مقادیر جدید وزن‌ها بصورت زیر بدست می‌آید:

w_1	w_2	w_3
۰٫۱۶	۰٫۱۸	۱٫۱۳

مشاهده می‌شود $w3>1$ یعنی باز هم نیاز است مبلغی از بانک وام گرفته شود تا در دارائی سوم سرمایه‌گذاری شود.

همچنین $w3>1$ باعث می‌شود تا سبد بهینه باز هم روی خط BC بدست آید. در این حالت سلول G1، برابر با ۴۶٪ بدست آمده است. یعنی شخص سرمایه‌گذار باید ۴۶٪ از سرمایه خود را وام بگیرد تا در دارایی سوم سرمایه‌گذاری کند.

نهایتا منحنی آن به صورت زیر بدست می‌آید. (شکل ۵۸-۱۳)



شکل ۵۸-۱۳ منحنی ترکیبی نهایی برای α=14

در صورتی که قسمت سبد بهینه را بزرگنمایی کنیم، مشاهده می‌کنیم که در ناحیه BC قرار دارد.

حل مساله برای α=21:

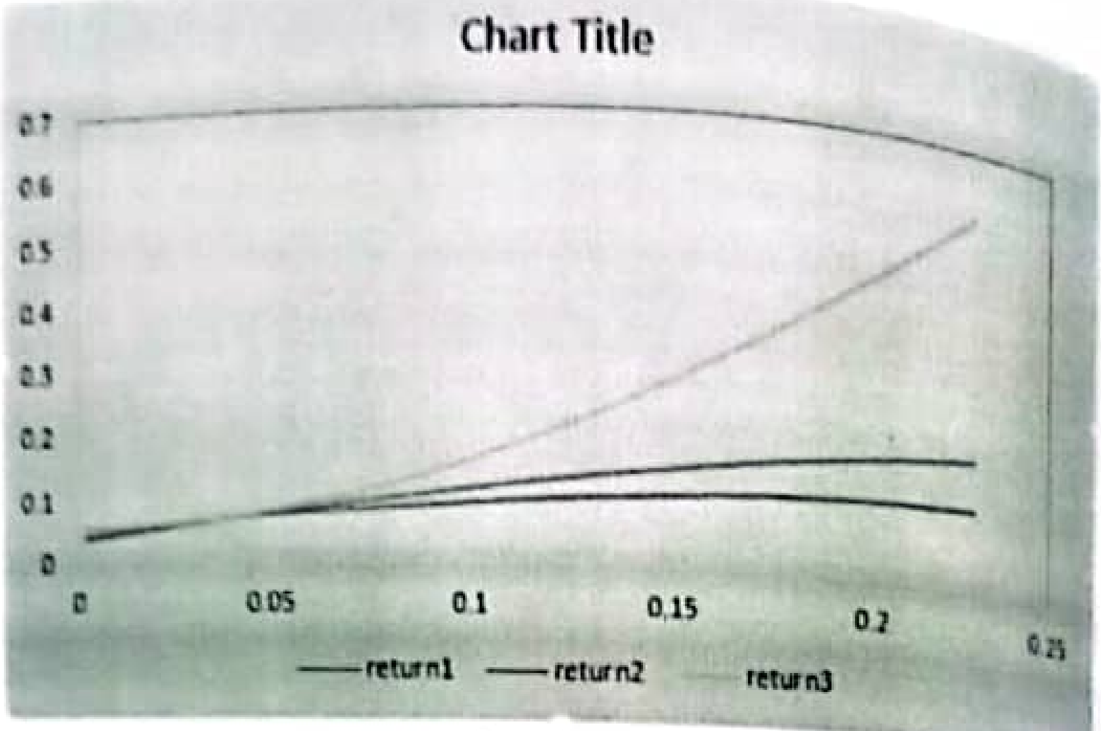
در این حالت وزن‌های بهینه برابر با جدول زیر خواهد شد:

w_1	w_2	w_3
۰.۱	۰.۱۲	۰.۷۵

بدین معنا که سرمایه‌گذار ریسک‌گریز است و باید در این حالت ۲٪ سرمایه را در بانک سپرده‌گذاری کند.

$$1-(w_1+w_2+w_3)=2\%$$

و منحنی آن بصورت زیر خواهد شد. (شکل ۵۹-۱۳)



شکل ۵۹-۱۳ منحنی ترکیبی نهایی برای α=21

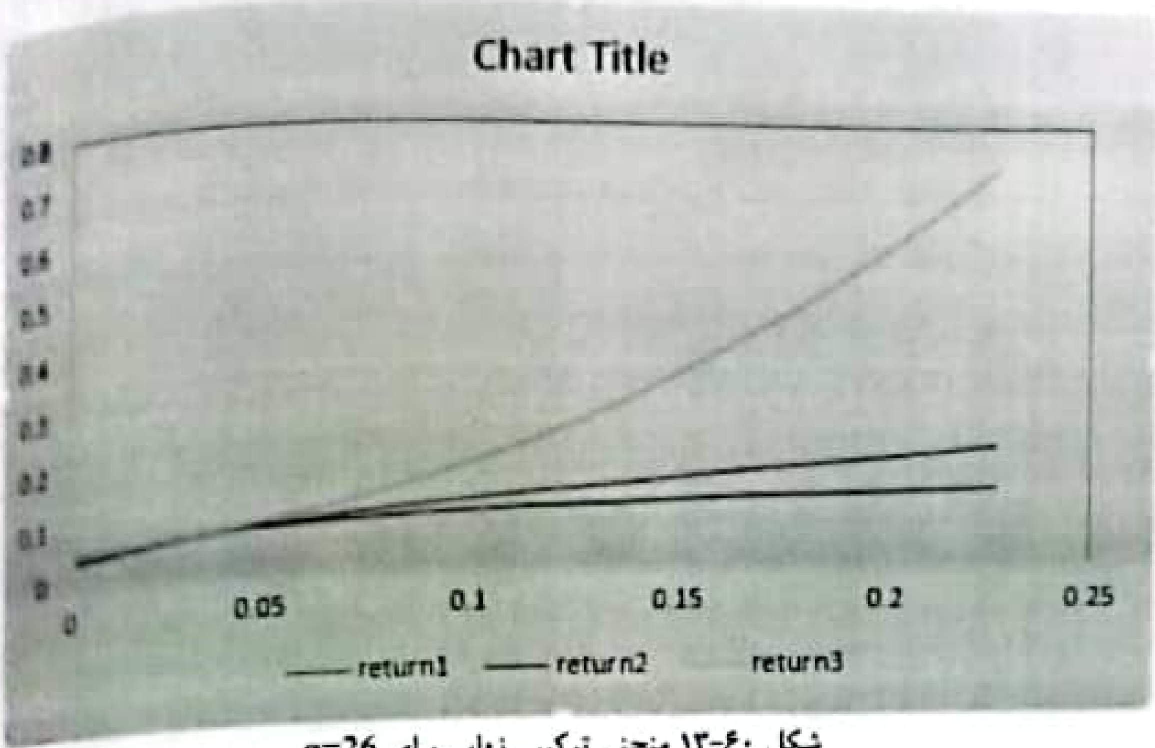
حل مساله برای α=26:

در این حالت وزن‌های بهینه به صورت جدول زیر خواهد شد:

w_1	w_2	w_3
۰.۰۸۶	۰.۰۹۶	۰.۶۰۸

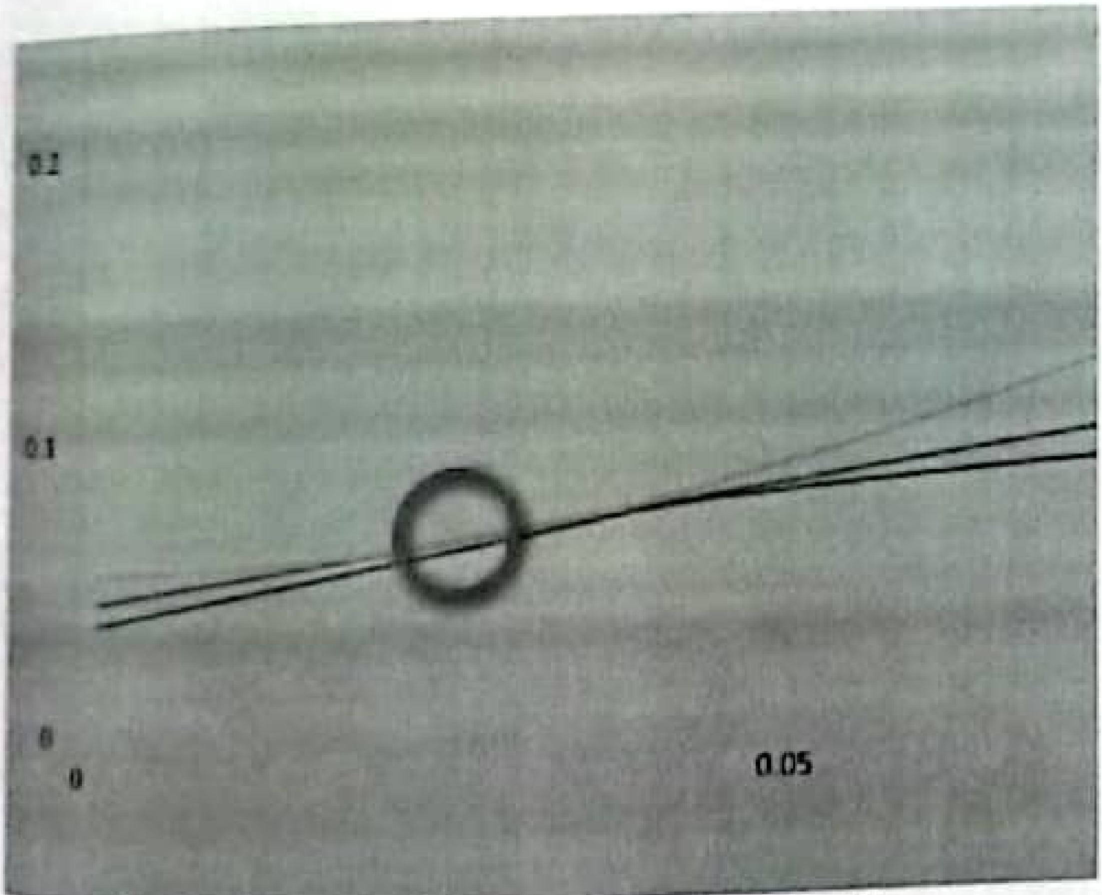
در این حالت سرمایه‌گذار ریسک‌گریز است و باید ۲۰.۸۵٪ از سرمایه خود را در بانک پس‌انداز کند.

منحنی آن به صورت زیر خواهد شد. (شکل ۶۰-۱۳)



شکل ۶۰-۱۳ منحنی ترکیبی نهایی برای α=26

ناحیه مربوط به سبد بهینه را بزرگنمایی می‌کنیم. (شکل ۶۱-۱۳)



شکل ۶۱-۱۳ بزرگنمایی سبد بهینه سرمایه گذاری با سطح α=26

در هر کدام از حالات فوق، مقدار ریسک و بازده شخص در سلول‌های F6 و F8 بدست می‌آیند به عنوان مثال در حالت α=26 که شخص ریسک‌گریزتر است مشاهده می‌کنیم که سرمایه‌گذار، ریسکی معادل با ۰.۰۲۸ را می‌پذیرد تا بازده ۰.۰۶۵ بدست آورد که ریسک و بازده پایینی است.

در جدول زیر خلاصه نتایج حالت‌های مختلف آورده شده است:

سطح ریسک گریزی (α)	return	risk	w1	w2	w3	$1-(w_1+w_2+w_3)$
۵	٪۱۵,۳۵	٪۱۴,۷۳	٪۴۵,۰۷	٪۵۰,۱۴	٪۳۱۶,۳۵	٪۳۱۱,۵۶-
۸	٪۱۱,۲۸	٪۹,۲۱	٪۲۸,۱۷	٪۳۱,۳۴	٪۱۹۷,۷۲	٪۱۵۷,۲۳-
۱۳	٪۸,۶۷	٪۵,۶۷	٪۱۷,۳۳	٪۱۹,۲۸	٪۱۲۱,۶۷	٪۵۸,۲۸-
۲۰	٪۷,۲۱	٪۳,۶۸	٪۱۱,۲۷	٪۱۲,۵۳	٪۷۹,۰۹	٪۲,۸۹-
۲۳	٪۶,۸۶	٪۳,۲۰	٪۹,۸۰	٪۱۰,۹۰	٪۶۸,۷۷	٪۱۰,۵۳
۲۵	٪۶,۶۷	٪۲,۹۵	٪۹,۰۱	٪۱۰,۰۳	٪۶۳,۲۷	٪۱۷,۶۹

	A	B	C	D	E	F
1		۱۳۸۷/۰۱	-۰٫۰۰۱۵۴۰۳۲۷	-۰٫۰۰۰۵۷۰۳۴۳	۰٫۰۰۰۲۵۳۹۹۱	۰٫۰۰۸۲۷۳۰۴۵
2		۱۳۸۷/۰۲	-۰٫۰۰۱۵۴۰۳۲۷	۰٫۰۰۳۴۶۱۸۸۲	۰٫۰۰۰۸۰۹۴۳۶	-۰٫۰۰۳۸۶۵۸۲۸
3		۱۳۸۷/۰۳	۰٫۰۰۹۳	۰٫۰۰۴۵۹۵۸۶۹	۰٫۰۰۰۴۸۴۴۹۹	-۰٫۰۳۶۵۱۹۹۹۱
4		۱۳۸۷/۰۴	۰٫۰۲۰۵	-۰٫۰۰۳۸۳۴۵۱۲	۰٫۰۱۴۱۳۳۱۷	-۰٫۰۱۰۷۰۴۳۵۸
5		۱۳۸۷/۰۵	-۰٫۰۱۰۳	-۰٫۰۰۴۱۶۸۳۳۸	۰٫۰۰۵۱۴۳۳۵۳	-۰٫۰۱۰۷۰۴۳۵۸
6		۱۳۸۷/۰۶	-۰٫۰۰۶۵	-۰٫۰۰۱۴۹۴۷۳۸	-۰٫۰۲۰۳۹۹۸۱۸	۰٫۰۰۴۰۴۰۷۶۵
7		۱۳۸۷/۰۷	۰٫۰۰۱۴۷۶۵۵۴	-۰٫۰۰۰۶۵۶۵	۰٫۰۰۰۶۴۳۳۶۸	-۰٫۰۰۷۱۳۷۰۴۴
8		۱۳۸۷/۰۸	-۰٫۰۰۸۰۵۳۰۷۶	-۰٫۰۰۳۸۴۰۳۴	۰٫۰۰۱۰۴۳۶۹۳	-۰٫۰۱۶۶۷۶۴۸۲
9		۱۳۸۷/۰۹	۰٫۰۰۱۰۸۷۳۴۶	۰٫۰۱۰۱۵۴۳۱۲	۰٫۰۰۰۵۸۹۱۶۶	-۰٫۰۰۰۵۱۵۹۹۶
10		۱۳۸۷/۱۰	۰٫۰۰۱۰۸۷۳۴۶	۰٫۰۰۱۳۳۶۱۰۶	۰٫۰۰۰۱۵۴۳۶۹	-۰٫۰۰۰۷۷۴۴۹۳
11		۱۳۸۷/۱۱	-۰٫۰۱۸۷۲۷۸۱۷	-۰٫۰۰۰۰۸۷	۰٫۰۰۰۰۶۳	-۰٫۰۰۰۶۳۰۷۹۷
12		۱۳۸۷/۱۲	-۰٫۰۰۵۳۷۷۴۳۹	-۰٫۰۰۳۳۹۵۱۵۵	۲٫۴۱۹۸۶E-۰۵	-۰٫۰۳۰۴۴۱۸۶۱
13		۱۳۸۸/۰۱	۰٫۰۳۳۳۴۴۵۸۹	۰٫۰۱۰۹۹۵۹۸۴	۰٫۰۰۰۱۳۶۵۸۴	-۰٫۰۱۱۰۰۵۴۴۳
14		۱۳۸۸/۰۲	۰٫۰۰۴۴۹۹۱۵۷	۰٫۰۰۳۰۱۰۸۷۶	۰٫۰۰۰۱۳۹۳۰۳	-۰٫۰۰۸۹۷۳۳۸
15		۱۳۸۸/۰۳	۰٫۰۰۴۲۰۹۴۳	-۰٫۰۰۶۱۶۸۳۹۳	۰٫۰۰۰۱۱۱۱۳۶	-۰٫۰۱۷۱۶۳۲۰۵

با توجه به این داده‌ها به سوالات زیر پاسخ دهید:

۱- ماتریس واریانس کواریانس مجموعه چهار سهم را بدست آورید.

۲- منحنی مرز کارای مارکویتز را برای این سبد سرمایه‌گذاری رسم نمایید.

۳- در صورتی سرمایه‌گذاری سطح ریسک‌گریزی $\alpha = 6$ داشته باشد و بخواهد کل سرمایه خود را در سهام سرمایه‌گذاری کند، وزن‌های بهینه آن را بدست آورید. همچنین میزان ریسک و بازده که برای این سرمایه‌گذار بهینه باشد را بدست آورید.

۴- در صورتی که سرمایه‌گذاری حداقل ۳٫۰٪ بازدهی بخواهد، میزان ریسک و وزن‌های بهینه سبد سرمایه‌گذار را تعیین نمایید.

۵- با استفاده از سطح ریسک‌گریزی $\alpha = 6$ منحنی ترکیبی مرز کارای مارکویتز و منحنی بی‌تفاوتی را رسم نمایید. (دقت شود باید این دو منحنی بر هم مماس باشند که در نقطه مماس، سبد بهینه فرد می‌باشد.)

۶- در صورتی که نرخ وام‌دهی و نرخ وام‌گیری برابر ۱۵٪ باشد، خط بهینه CAL را رسم نمایید.

۷- مدل بهینه‌سازی سبد سرمایه‌گذاری در سبد تماما ریسکی را با استفاده از ماکزیمم‌سازی بازده سبد در سطح ریسک مشخص، انجام دهید و منحنی مرز کارای آن را رسم نمایید.