باسمه تعالی

تمرین تئوری سوم درس یادگیری ماشین- (فصل ۸)

مهلت تحویل: ۱۴۰۲/۰۲/۰۸

دانشگاه علم و صنعت ایران
دانشکده مهندسی برق- گروه کنترل

لطفا به نکات ذیل توجه فرمایید :

- تمرینات خود را به صورت فایل PDF در سامانه LMS بارگذاری نمایید.
- نام گذاری فایل PDF به شکل **" Last Name _ Student ID _ "HW"_ HW Number "** باشد.
- تمرینات خود را تا ساعت **۲۴** موعد مقرر ارسال فرمایید.
- با توجه به اینکه پاسخ سوالات در پایان موعد تحویل در سامانه LMS قرار می گیرد ، به تمرینات ارسالی پس از مهلت تحویل نمره ای تعلق نخواهد گرفت.
- **به پاسخ های تایپ شده ۵ نمره تشویقی (از ۱۰۰ نمره) تعلق می گیرد .**
- **لطفا در صورت نوشتن با دست ، پاسخ های خود را به صورت خوانا نوشته و ارسال نمایید.**
- **پاسخ هایی که به صورت کاملا کپی از دیگر پاسخ ها باشند ، به هردو (یا چند) پاسخ مشابه نصف نمره محاسبه شده تعلق می گیرد.**

سوال ۱) تابع زیر را در نظر بگیرید ،

$$f(x) = x^3 + 6x^2 - 3x - 5$$

نقاط زینی ، ماکزیمم و مینیمم آن را با محاسبه بدست آورید .

سوال ۲) صحیح یا غلط بودن عبارات زیر با تحلیل مشخص نمایید.

الف) جمع دو تابع محدب حتما محدب خواهد بود.

ب) تفریق دو تابع محدب حتما محدب خواهد بود.

پ) ضرب دو تابع محدب حتما محدب خواهد بود.

ت) ماکزیمم دو تابع محدب حتما محدب خواهد بود.

سوال ۳) تابع زیر را در نظر بگیرید :

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + axy$$

به ازای چه مقادیری از a (در صورت وجود)این تابع به ترتیب مقعر، محدب و نامعین خواهد بود؟

سوال ۴) تابع هزینه ی درجه دوم دومتغیره ی زیر را در نظر بگیرید :

$$f(x,y) = ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f$$

نشان دهید تابع مذکور محدب است اگر و فقط اگر a و b نامنفی باشند و c حداکثر برابر با اندازه مطلق میانگین هندسی a و b باشد .

سوال ۵) تابع هدف زیر را در نظر بگیرید :

$$f(x) = [x(x-2)]^2 + x^2$$

بروزرسانی نیوتن را برای این تابع هدف زمانی که از مقدار $x=1$ شروع شود ، بدست آورید .

سوال ۶) آیا برای بروزرسانی نیوتن این امکان وجود دارد که علاوه بر رسیدن به مقدار مینیمم تابع ، به مقدار ماکزیمم آن دست یابد ؟ پاسخ خود را توجیه نمایید . در چه توابعی تضمین شده است که این روش به ماکزیمم علاوه بر مینیمم دست پیدا می کند ؟

سوال ۷) تابع تک متغیره ی $f(x) = x^3 - 3x$ می باشد ، می توان برای این تابع شکل چند متغیره ی زیر را تعریف نمود :

$$F(x_1,...,x_2) = \sum_{i=1}^{d} f(x_i)$$

نشان دهید این تابع ، یک ماکزیمم ، یک مینیمم و $2^d - 2$ نقطه ی زینی خواهد داشت .

سوال ۸) فرض کنید می خواهیم یک تابع ماتریسی $J(W)$ را از طریق روش گرادیان کاهشی مینیمم نماییم . یعنی رابطه ی بروزرسانی برابر است با :

$$W \to W - \varepsilon \nabla J(W)$$

که مقدار ε طول گام خواهد بود.

همچنین اطلاعات زیر را در ارتباط با گرادیان در اختیار داریم :

- $J(W - \varepsilon \nabla J(W)) = J(W) - \varepsilon \ \mathrm{tr}(\nabla J(W)^T \nabla J(W)) + O(\varepsilon^2)$
- برای ماتریس M غیر صفر می توان نوشت :

$$tr(M^T M) = \sum_i (M^T M)_{ii} = \sum_i \sum_j (M^T)_{ij} (M)_{ji} = \sum_i \sum_j M_{ij} M_{ji}$$
$$= \sum_{ij} (M_{ji})^2 > 0$$

که به این معنا می باشد که اگر گرادیان غیر صفر باشد داریم :

$$\mathrm{tr}(\nabla J(W)^T \nabla J(W)) > 0 \quad \Rightarrow \quad J(W-\varepsilon \nabla J(W)) < J(W)$$

بنابراین می توان گفت $\nabla J(W)$ گرادیان کاهشی می باشد .

حال با توجه به اطلاعات فوق نشان دهید عبارت $A^T A \nabla J(W) B B^T$ برای ماتریس های غیر صفر A و B کاهشی و یا ثابت می باشد . (منظور مقدار در تابع J می باشد .)

دانشجویان گرامی می توانید در صورت وجود هر گونه سوال و یا اشکال از طریق تلگرام ، بله و یا ایمیل زیر با اینجانب در ارتباط باشید.

A_Marzband@elec.iust.ac.ir