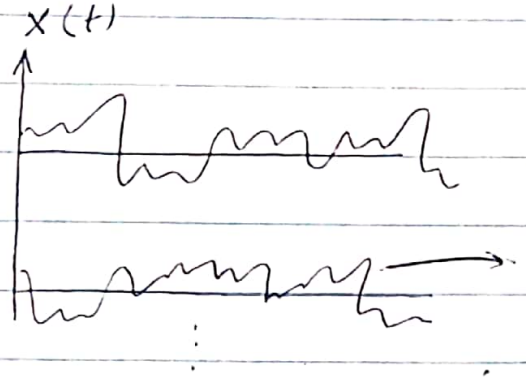
* فرآیند تصادفی stochastic process



یک متغیر تصادفی تابع زمانی

یک تابع نمونه (sample fn)

" برای هر نقطه t_1 ، یک متغیر تصادفی $X(t_1) \triangleq X_{t_1}$ داریم

مثال

سیگنال $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$

وقتی θ از لایه‌های مختلف جوی منعکس میشود ، موج برگشته دارای دامنه و فاز متغیر (تصادفی) خواهد بود .

نکته از نظر تئوری در حالت کلی هنگامی فرآیند $X(t)$ کاملاً شناخته شده است که :

" به ازاء هر n دلخواه و هر مجموعه زمانهای دلخواه $t_1, \dots, t_n$ تابع توزیع احتمال مشترک $f_{X_{t_1} \cdots X_{t_n}}(x_1, \dots, x_n)$ شناخته شده باشد

اما در عمل گاهی شرایطی وجود دارد θ مطالعه سیگنال $X(t)$ را راحت‌تر می‌سازد ؛ یعنی اغلب :

اولاً تابع توزیع احتمال یکسان در تمام نقطات (برای هر X_t) حاکم است

ثانیاً هر نقطه از نقطه نزدیک آن مستقل نیست یعنی ←

یعنی نوعی پیوستگی در فرآیند وجود دارد :

<u>تعریف</u> فرآیند $X(t)$ در احتمال پیوسته است اگر $\lim_{t \to s} X_t = X_s$

$$\text{Prob}\{|X_t - X_s| \geq \varepsilon\} \xrightarrow[s \to t]{} 0 \qquad \text{for all } t, s$$

<u>تابع میانگین</u> :

$$E[X_t] \triangleq m_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x \, f_{X_t}(x) \, dx$$

$$\triangleq \bar{X}_t$$

تابع همبستگی :

$$R_X(t,s) \triangleq E[X_t X_s] = \iint_{-\infty}^{\infty} \alpha\beta \, f_{X_t X_s}(\alpha, \beta) \, d\alpha \, d\beta$$

(برای آنکه فرآیند پیوسته باشد ، انتظار داریم با نزدیک شدن s, t به یکدیگر ، $R_X(t,s)$ بزرگ شود)

تابع کوواریانس :

$$C_X(t,s) = E[(X_t - \bar{X}_t)(X_s - \bar{X}_s)]$$

$$= R_X(t,s) - \bar{X}_t \bar{X}_s$$

<u>Note</u> $s = t \Rightarrow C_X(t,t) = E[(X_t - \bar{X}_t)^2] = \sigma_{X_t}^2$

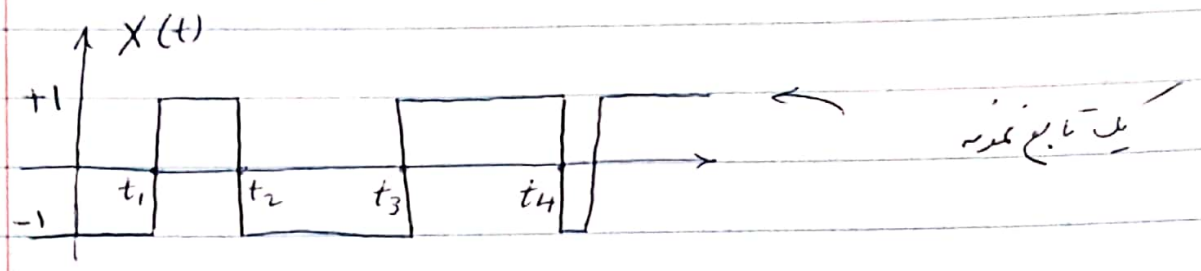
<u>توجه</u>

$X_t \to X(t) \qquad f_{X_t}(x) \to f_X(t,x)$

$\bar{X}_t \to \bar{X}(t) \qquad \sigma_{X_t} \to \sigma_X(t)$

Scanned by CamScanner

مثال: موج تصادفی تلگرافی Random telegraph wave



در هر زمان t_k که واقعه k ام اتفاق می‌افتد پرش صورت می‌گیرد.

(مثلاً scan کردن یک خط روزنامه)

توجه: نقاط تقاطع با محور زمان تصادفی است.

فرض

۱- تعداد متوسط نقاط در ثانیه λ باشد یعنی:

$$\begin{cases} \text{Prob}\{\text{یک نقطه در فاصله } dt\} \xrightarrow[dt\to 0]{} \lambda\, dt \\ \text{Prob}\{\text{بیش از یک نقطه در فاصله } dt\} \xrightarrow[dt\to 0]{} 0 \end{cases}$$

و نیز

یعنی احتمال دو نقطه در فاصله زمانی کوچک به سمت صفر میل می‌کند

۲- اگر I_1 و I_2 دو فاصله زمانی غیر متلاقی باشند، تعداد نقاط در I_1 مستقل از تعداد نقاط در I_2 باشد.

۳- شروع آزمایش $t=0$ باشد و

$$\text{Prob}(X_0 = 1) = \text{Prob}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}$$

Scanned by CamScanner

سؤال احتمال اتفاق k نقطه از لحظهٔ t تا لحظهٔ s چیست؟

$$Prob\{k;\ t, s\} = Prob\{k;\ t, t+\tau\}$$

در اینجا با فرض ایستایی $= P\{k;\ \tau\}$

ثابت میشود

$$P\{k, \tau\} = e^{-\lambda\tau}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}$$

« فرآیند پواسون »

$$R_X(t,s) = E[X_t X_s] = \quad (\text{با فرض } \tau = s-t > 0)$$

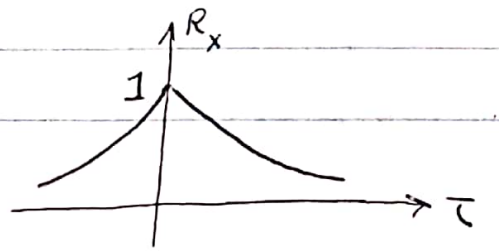
$$(+1)\,Prob\{X_s, X_t \text{ هم علامت}\} + (-1)\,Prob\{\text{مختلف العلامه}\}$$

$$= (+1)\,Prob\{\text{تعداد نقاط بین } t, s \text{ زوج}\} + (-1)\,Prob\{\text{تعداد نقاط بین } t, s \text{ فرد}\}$$

$$= e^{-\lambda\tau}\left[\sum_{\substack{k=0\\ \text{زوج}}}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!} - \sum_{\substack{k=0\\ \text{فرد}}}^{\infty}\frac{(\lambda\tau)^k}{k!}\right]$$

$$= e^{-\lambda\tau}\left[\sum_{k \text{ زوج}}\frac{(-\lambda\tau)^k}{k!} + \sum_{k \text{ فرد}}\frac{(-\lambda\tau)^k}{k!}\right]$$

$$= e^{-\lambda\tau}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\lambda\tau)^k}{k!} = e^{-\lambda\tau}\cdot e^{-\lambda\tau} = e^{-2\lambda\tau}$$



در حالت کلی

$$R_X(\tau) = e^{-2\lambda|\tau|}$$

تمرین: $E[X_t] = 0$

Scanned by CamScanner

* ایستایی و ergodicity

ایستا ← خواص آماری فرآیند (میانگین، خودهمبستگی ...) تابع زمان نباشد.

$$\left.\begin{aligned} m_X(t) &= E[X(t)] \longrightarrow m_X \quad \text{ثابت} \\ R_X(t,\tau) &= E[X(t)X(t+\tau)] \longrightarrow R_X(\tau) \end{aligned}\right\} \text{W.S.}$$

و کلاً: $f_{X_t}(x) = f_X(t,x) \longrightarrow f_X(x)$

• خواص تابع خودهمبستگی $R_X(\tau)$

۱- تقارن زوج $\quad R_X(\tau) = R_X(-\tau)$

۲- ماکزیمم در $\tau=0$ $\quad |R_X(\tau)| \leq R_X(0)$

اثبات ۱:

$$R_X(\tau) = E[X_t X_{t+\tau}] = E[X_{s-\tau} X_s] = R_X(-\tau)$$

اثبات ۲:

بوضوح داریم $\quad E[(X_t \pm X_{t+\tau})^2] \geq 0$

$$\Rightarrow E[X_t^2] \pm 2E[X_t X_{t+\tau}] + E[X_{t+\tau}^2] \geq 0$$

or $R_X(0) \pm 2R_X(\tau) + R_X(0) \geq 0$

or $R_X(0) > \pm R_X(\tau) \Rightarrow R_X(0) \geq |R_X(\tau)|$

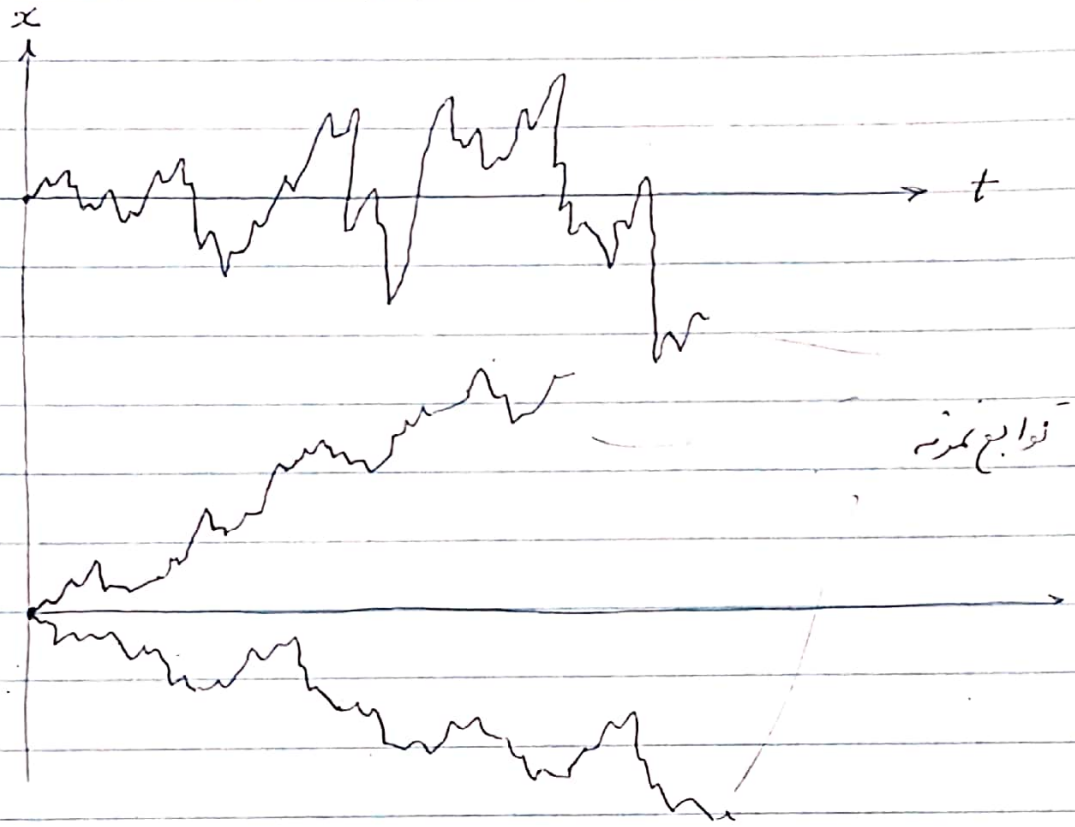
توجه: این خواص در مورد $C_X(\tau)$ نیز صادق است:

$$C_X(\tau) = E[(X_t - \bar{X})(X_{t+\tau} - \bar{X})] = R_X(\tau) - \bar{X}^2$$

Scanned by CamScanner

• فرآیند گوسی (نرمال) : $m_X(t)$ و $C_X(t,s)$ مشخص کننده کامل فرآیند

مثال حرکت براونی ← حرکت بی‌نظم یک مولکول در هوا

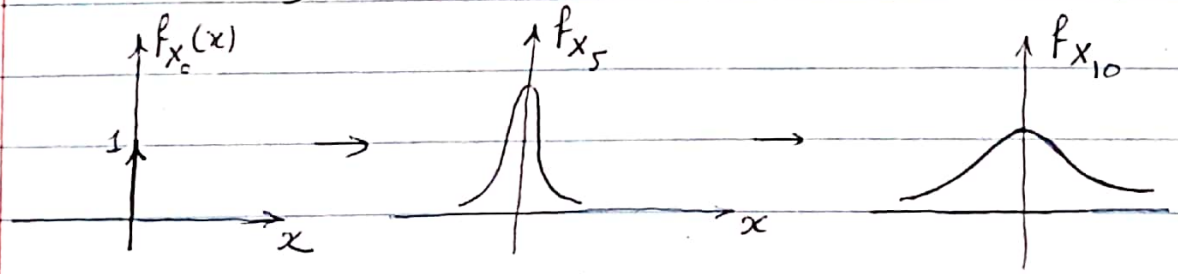


• مدل ریاضی فرآیند :

$$\begin{cases} E[X_t] = 0 \\ E[X_t X_s] = \min(t,s) \end{cases}$$ ← فرآیند گوسی با

Note : $\sigma_{X_t}^2 = E[X_t^2] = t$

یعنی واریانس X_t تابع زمان است و لذا "ایستا" نیست



نکته : اگر مثلاً حرکت مولکول هوا در یک لوله ایستا است

توجه : این فرآیند استقلال نقطه به نقطه ندارد ← پیوسته است

Scanned by CamScanner

تمرین: ثابت کنید حرکت براونی یک فرآیند با نواصل مستقل است:

الف) نشان دهید متغیر $X_t - X_s$ $(\forall t, s)$ گوسی است با متوسط صفر و واریانس $|t-s|$

ب) پس نشان دهید حرکت براونی یک فرآیند پیوسته است.
برای این کافیست ثابت کنید که فرآیند پیوستگی در گشتاور دوم دارد، یعنی

$$E(X_t - X_s)^2 \xrightarrow[t \to s]{} 0$$

و در نتیجه پیوستگی در احتمال نیز دارد.

2. بالاخره نشان دهید یک فرآیند با نواصل (نموهای) مستقل است یعنی متغیرهای $X_{t_2} - X_{t_1}$ و $X_{t_4} - X_{t_3}$ مستقلند اگر $t_2 - t_1$ و $t_4 - t_3$ متداخل نباشند.

Scanned by CamScanner

~~Wide Sense Stationary~~ ~~W.S.~~ ایستا بودن •

* خواص مشترک دو فرایند

Cross Correlation : $R_{xy}(t,s) \triangleq E[X_t Y_s]$

Cross Covariance :

$$C_{xy}(t,s) = E[(X_t - \bar{X}_t)(Y_s - \bar{Y}_s)]$$
$$= R_{xy}(t,s) - \bar{X}_t \bar{Y}_s$$

if $C_{xy}(t,s) = 0 \Rightarrow X, Y$ uncorrelated
(for all t, s) • (فرآیندهای غیرهمبسته)

• فرآیندهای مشترکاً ایستا : (jointly stationary)

خواص آماری مشترک آنها مستقل از انتقال زمانی باشد، مثلاً

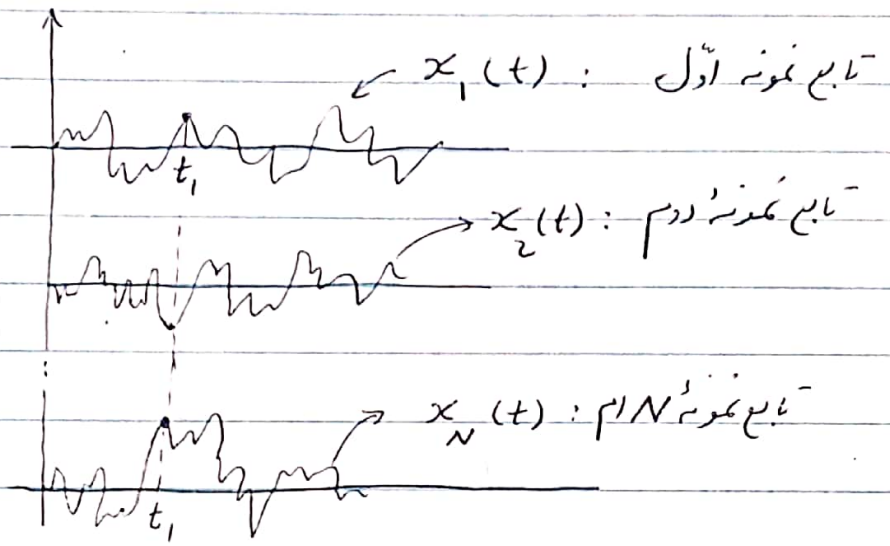
$$R_{xy}(t,s) = R_{xy}(t-s) = R_{xy}(\tau)$$

Scanned by CamScanner

• فرآیند ارگادیک

فرض کنید $X(t)$ ایستاست، می‌خواهیم مثلاً $E[X_t] = \bar{X}$
یعنی میانگین فرآیند را حساب کنیم؛ کافیست برای یک لحظهٔ دلخواه t_1

$$\bar{X} = E[X(t_1)] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)$$



حال با تعریف متوسط زمانی تابع $x_i(t)$ بصورت:

$$\langle x_i(t) \rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_i(t)\, dt$$

می‌گوییم $X(t)$ ارگادیک است هرگاه داشته باشیم:

$$\langle x_1(t) \rangle = \langle x_2(t) \rangle = \dots = \langle x_i(t) \rangle = \dots = E[X_t] = \bar{X}$$

یعنی برای محاسبهٔ متوسط آماری (میانگین) بتوانیم از یک تابع نمونه متوسط زمانی بگیریم؛ و این مطلب برای هر خاصیت آماری دیگر نیز صادق باشد. مثلاً برای محاسبهٔ تابع همبستگی:

Scanned by CamScanner

$$R_X(\tau) = E[X_t X_{t+\tau}] \overset{?}{=} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} x_i(t_1)\, x_i(t_1+\tau)$$

$$\overset{?}{=} \langle x_j(t)\, x_j(t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_j(t)\, x_j(t+\tau)\, dt$$

<u>تعریف کلی</u>

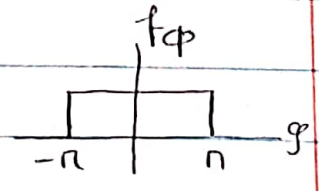
اگر $X(t)$ یک فرآیند ایستا بوده و $x(t)$ یک تابع نمونه (دلخواه) آن باشد، فرآیند $X(t)$ را ارگادیک می‌گوئیم اگر برای هر تابعی بصورت $g(X(t))$:

$$E[g(X(t))] \overset{?}{=} \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(x(t))\, dt = \langle g(x(t))\rangle$$

<u>نکته</u> در حالت کلی ارگادیک بودن را نمی‌توان ثابت کرد، مگر در مورد فرآیند گوسی که پیوسته باشد و نیز X_t : $\int_{-\infty}^{\infty} |B_X(\tau)|\, d\tau < \infty \quad \left(\Rightarrow C_X(\tau) \xrightarrow[\tau\to\infty]{} 0\right)$

<u>تمرین</u> نشان دهید فرآیند

$$\begin{cases} X(t) = a \sin(\omega_0 t + \Phi) \\ \Phi \sim f_\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}, \quad -\pi < \varphi < \pi \end{cases}$$



$E[X_t] = \langle x(t)\rangle = 0$ (~~در توابع میانگین~~ ارگادیک متوسط)

$E[X_t^2] = \langle x^2(t)\rangle = \frac{a^2}{2}$ (ارگادیک تئوری‌ادم)

Scanned by CamScanner