

فصل پنجم:

پنخس بار ہار مونیکی

مطالب این بخش از مرجع زیر اقتباس شده است:

[18]: E. F. Fuchs, M. A. S. Masoum, "Power Quality in Power Systems and Electrical Machines", Elsevier Academic Press, 2008, ISBN: 978-12-369536-9.

۵-۱- ماتریس‌های سیستم قدرت

۵-۱-۱- ماتریس ادمیتانس شینه

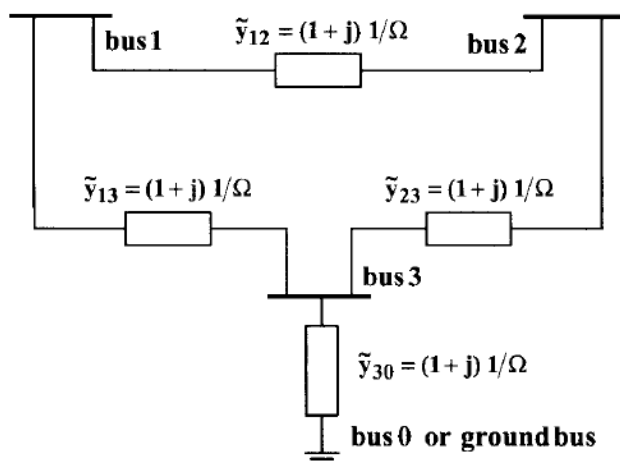
با استفاده از قوانین اهم و کیرشهف می‌توان روابط ریاضی ماتریسی که مفید برای تحلیل پخش بار هستند را بدست آورد. قانون KCL ، ماتریس‌های شینه و قانون KVL ، ماتریس‌های حلقه را تولید می‌کنند. ماتریس شینه (که به فرم ادمیتانس نوشته می‌شود) از اعمال مستقیم قانون KCL به هر شینه مداری به غیر از شینه مرجع (زمین) بدست می‌آید.

$$\begin{array}{c} \bar{I}_{bus} = \bar{Y}_{bus} \bar{V}_{bus} \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow \\ n \times 1 \quad \quad n \times n \quad n \times 1 \\ \swarrow \quad \searrow \quad \underbrace{\hspace{2cm}} \\ \text{row} \quad \text{column} \quad n \times 1 \end{array}$$

درایه‌های قطری (y_{ij}) در ماتریس ادمیتانس از مجموع کلیه ادمیتانس‌های خطوط متصل شده به شینه i بدست می‌آید. همچنین درایه‌های غیر قطری (y_{ij}) در ماتریس فوق، برابر با منفی ادمیتانس خط بین شینه i و j است. ماتریس ادمیتانس یک ماتریس متقارن است که درایه‌های آن اعداد مختلط هستند. همچنین آن، یک ماتریس $n \times n$ است. اگر ماتریس ادمیتانس غیر صفر باشد، وارون خواهد داشت و لذا می‌توان چنین نوشت:

$$\bar{V}_{bus} = (\bar{Y}_{bus})^{-1} \bar{I}_{bus}$$

مثال: ماتریس ادمیتانس را در شبکه زیر بدست آورید:



حل:

عناصر غیر از قطر اصلی چنین محاسبه می شوند:

$$y_{21} = y_{12} = -(1 + j) 1/\Omega,$$

$$y_{31} = y_{13} = -(1 + j) 1/\Omega,$$

$$y_{32} = y_{23} = -(1 + j) 1/\Omega,$$

همچنین عناصر قطری اصلی به صورت زیر بدست می آیند:

$$y_{11} = (2 + 2j) 1/\Omega,$$

$$y_{22} = (2 + 2j) 1/\Omega,$$

$$y_{33} = (3 + 3j) 1/\Omega,$$

در نتیجه ماتریس ادمیتانس شبکه فوق چنین می باشد:

$$\bar{Y}_{\text{bus}} = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2 + 2j) & -(1 + j) & -(1 + j) \\ -(1 + j) & (2 + 2j) & -(1 + j) \\ -(1 + j) & -(1 + j) & (3 + 3j) \end{bmatrix}$$

۵-۱-۲- تبدیلات مثلثی^۱

از آنجا که کلیه شینه‌ها از طریق خطوط انتقال به یکدیگر متصل نیستند، لذا ماتریس ادمیتانس شینه بسیار تنگ است و تنها کمتر از ۱٪ درایه‌های ماتریس، غیر صفر هستند. به منظور کاهش نیاز حافظه کامپیوتر، برنامه‌ریزی تنگ‌سازی استفاده می‌شود. در این روش برنامه‌ریزی، ماتریس‌های تنگ به شکل فشرده‌ای ذخیره می‌شوند. در روش معمول برنامه‌ریزی تنگ‌سازی، تنها درایه‌های غیر صفر ذخیره می‌شوند.

کاربرد روش برنامه‌ریزی تنگ‌سازی در ابتدا برای ماتریس Y_{bus} انجام می‌گیرد. از آنجا که ماتریس ژاکوبین نیز یک ماتریس تنگ است، لذا برنامه‌ریزی تنگ‌سازی برای آن مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در مهندسی برق نیز همانند دیگر شاخه‌های مهندسی، لازم است که به طور همزمان یک مجموعه از معادلات خطی جبری حل شوند. شکل کلی آن، حل معادله زیر است:

$$\bar{A} \cdot \bar{x} = \bar{b}$$

که در آن ماتریس A یک ماتریس $n \times n$ است و b بردار n بُعدی است. حل این معادله شبیه به حل معادله زیر است:

$$\bar{I}_{bus} = \bar{Y}_{bus} \bar{V}_{bus}$$

و یا

$$\bar{V}_{bus} = [\bar{Y}_{bus}]^{-1} \bar{I}_{bus}$$

اگر بتوان ماتریس A را به دو ماتریس بالا مثلثی و پایین مثلثی تبدیل کرد، آنگاه می‌توان نوشت:

$$\bar{A} = \bar{L} \cdot \bar{U}$$

که در آن L ماتریس چپ پایین مثلثی (ماتریسی که کلیه درایه‌های l_{rc} آن برای $c > r$ صفر باشد) و U

ماتریس راست بالا مثلثی (ماتریسی که کلیه درایه‌های l_{rc} آن برای $r > c$ صفر باشد) است. در نتیجه:

$$\bar{A} \cdot \bar{x} = [\bar{L} \cdot \bar{U}] \bar{x} = \bar{b}$$

فرض کنید $U \cdot x$ متغیر جدیدی مانند w را تولید کند که یک بردار n بُعدی است. لذا:

$$\bar{w} = \bar{U} \cdot \bar{x}$$

و

$$\bar{L} \cdot \bar{w} = \bar{b}$$

که در آن

$$\bar{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

و

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdot \\ l_{21} & l_{22} & \cdot & \cdot \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdot \\ 0 & u_{22} & u_{13} & \cdot \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

دقت شود که x و b به ترتیب متناظر با بردارهای ولتاژ V_{bus} و جریان I_{bus} هستند.

جایگزینی مستقیم

معادله $Lw=b$ به سرعت برای w حل می‌شود چراکه معادله دارای فرم ویژه است.

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ l_{21} & l_{22} & 0 & 0 & \cdot \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

با حل این معادله برای سطر اول خواهیم داشت:

$$l_{11}w_1 = b_1$$

و یا

$$w_1 = \frac{b_1}{l_{11}}$$

به همین ترتیب برای سطر دوم

$$l_{21}w_1 + l_{22}w_2 = b_2$$

و یا

$$w_2 = \frac{b_2 - l_{21}w_1}{l_{22}}$$

این روند تا محاسبه کامل درایه‌های w انجام می‌گیرد.

$$w_r = b_r - \sum_{q=1}^{r-1} l_{rq}w_q$$

حال با داشتن بردار w ، رابطه $w = U \cdot x$ استفاده می‌شود تا بردار x محاسبه گردد.

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdot \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdot \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

جایگزینی معکوس^۱

با حل معادله فوق برای سطر آخر خواهیم داشت:

$$w_3 = u_{33}x_3$$

و یا

$$x_3 = \frac{w_3}{u_{33}}$$

برای سطر ماقبل آخر نیز می توان چنین نوشت:

$$w_2 = u_{22}x_2 + u_{23}x_3$$

و یا

$$x_2 = \frac{w_2 - u_{23}x_3}{u_{22}}$$

و به طور کلی برای سطر $(n-1)$ ام داریم:

$$w_{n-1} = u_{n-1, n-1}x_{n-1} + u_{n-1, n}x_n$$

یا

$$x_{n-1} = \frac{w_{n-1} - u_{n-1, n}x_n}{u_{n-1, n-1}}$$

و برای سطر n ام خواهیم داشت:

$$x_r = \frac{w_r - \sum_{q=r+1}^n u_{rq}x_q}{u_{rr}}$$

در نتیجه کلیه درایه های x با روش جایگزینی معکوس بدست خواهد آمد.

در واقع با انجام مراحل بیان شده، یعنی تبدیل مثلثی، جایگزینی مستقیم و معکوس معادله $A.x=b$ بدون نیاز

به بدست آوردن معکوس ماتریس A ، حل خواهد شد. موفقیت روش فوق به عوامل زیر بستگی دارد:

- سرعت تبدیل ماتریس A به ماتریس های پایین مثلثی و بالا مثلثی
- میزان تنگ بودن ماتریس های L و U

یک فرم از ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی به شکل زیر است:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdot \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdot \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdot \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

۵-۱-۳- ماتریس ژاکوبین

ژاکوبین n تابع y_1, y_2, \dots, y_n و n مجهول x_1, x_2, \dots, x_n به فرار زیر است:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

ماتریس ژاکوبین همچون ماتریس Y_{bus} یک ماتریس تَنگ است و لذا می‌توان آنرا به ماتریس‌های بالا

مثلثی و پایین مثلثی تبدیل کرد.

مثال: اگر ماتریس‌های L و U را به فرم زیر تعریف کنیم درایه‌های این ماتریس‌ها را بدست آورید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ l_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}$$

حل:

$$J_{11} = u_{11} \quad \text{or} \quad u_{11} = J_{11}$$

$$J_{12} = u_{12} \quad \text{or} \quad u_{12} = J_{12}$$

$$J_{21} = l_{21}u_{11} \quad \text{or} \quad l_{21} = J_{21}/u_{11}$$

$$J_{22} = l_{21}u_{12} + u_{22} \quad \text{or} \quad u_{22} = J_{22} - l_{21}u_{12}$$

و در حالت کلی برای تبدیل ماتریس ژاکوبین به ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی پیشنهاد شده می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

$$l_{rc} = \frac{J_{rc} - \sum_{q=1}^{c-1} l_{rq} u_{qc}}{u_{cc}}, \quad \text{for } c = 1, 2, \dots, (r-1)$$

و

$$u_{rc} = J_{rc} - \sum_{q=1}^{r-1} l_{rq} u_{qc}, \quad \text{for } c = r, r+1, \dots, n$$

مثال: ماتریس A را به ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی تبدیل کنید:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

حل:

می‌توان از روش زیر برای تبدیل فوق استفاده کرد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

سطر اول برای حذف درایه‌های ستون اول ماتریس A در زیر درایه a_{11} استفاده می‌شود. با توجه به

درایه‌های دوم و سوم در ستون اول ماتریس A می‌توان نتیجه گرفت که باید 0.5 - برابر سطر اول از سطر

دوم و 0.25 برابر سطر اول از سطر سوم کم شود. لذا نتیجه بصورت زیر خواهد شد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix}$$

حال سطر دوم برای حذف درایه‌های ستون دوم ماتریس A در زیر درایه قطر اصلی استفاده می‌شود. با توجه به درایه سوم در ستون دوم ماتریس A می‌توان نتیجه گرفت که باید $0/5$ - برابر سطر دوم از سطر سوم کم شود. لذا نتیجه بصورت زیر خواهد شد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix}$$

گاهی اوقات ممکن است ماتریس A را نتوان به ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی به فرم داده شده تبدیل کرد. برای مثال ماتریس زیر را در نظر بگیرید و با استفاده از روش بیان شده در مثال فوق آنرا تبدیل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

اگر بخواهیم به روش فوق اقدام کنیم، برای صفر کردن درایه‌های غیر قطری ستون اول خواهیم داشت:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -25 \\ 0 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

اکنون برای صفر کردن درایه آخر ستون دوم نمی‌توان به روش فوق اقدام کرد. لذا در این حالت باید از روش زیر استفاده کرد.

ماتریس جایگشتی P ، ماتریسی است که در هر سطر و یا هر ستونی از آن فقط یک درایه ۱ بوده و بقیه درایه‌های آن سطر و یا ستون صفر هستند. به عنوان مثال، ماتریس 4×4 زیر یک ماتریس جایگشتی است.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ضرب یک ماتریس جایگشتی P در هر ماتریس دیگری مانند ماتریس A ، ماتریسی را بوجود می‌آورد که سطرهای آن با سطرهای ماتریس A فقط جابجا شده است ولی درایه‌های سطرها تغییری نکرده است. به عنوان مثال، به رابطه زیر توجه کنید:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

همانطور که مشاهده می‌شود، تنها سطرهای ماتریس بدست آمده با ماتریس اولیه جابجا شده است. به طور کلی برای هر ماتریس A ، ماتریس جایگشتی P وجود دارد به گونه‌ای که ماتریس PA قابل تبدیل به ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی بیان شده در قسمت‌های قبل باشد. لذا می‌توان نوشت:

$$PA = LU$$

مثلاً ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

همانطور که در مثال قبل مطرح شد، این ماتریس قابل تبدیل به ماتریس‌های بالا مثلثی و پایین مثلثی نیست.

اما می‌توان ماتریس جایگشتی برای آن پیدا کرد که ماتریس PA بدست آمده، قابل تبدیل باشد.

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 8 & -1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

حال می‌توان ماتریس بدست آمده را به روش‌های بیان شده تبدیل کرد:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ -2 & 3 & 5 \\ 4 & 8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & -25 \end{bmatrix}$$

حال دوباره به حل معادله اصلی $AX=B$ برمی گردیم. اگر ماتریس A با استفاده از ماتریس جایگشتی P به ماتریس های بالا مثلثی و پایین مثلثی تبدیل شد ($PA=LU$)، آنگاه معادله اصلی به روش زیر حل خواهد شد:

- بدست آوردن ماتریس های P, L و U
- محاسبه ماتریس PB
- حل معادله $LY=PB$ برای بردار جدید Y به روش جایگزینی مستقیم
- حل معادله $UX=Y$ برای بردار X به روش جایگزینی معکوس

تمرین شماره ۹:

با استفاده از نرم افزار *Matlab* برنامه ای بنویسید که هر ماتریس مربعی دلخواه را به ماتریس های بالا مثلثی و پایین مثلثی تبدیل کند.

تمرین شماره ۱۰:

با استفاده از زیر برنامه نوشته شده در تمرین شماره ۹، برنامه ای بنویسید که معادله ماتریسی $AX=B$ را به روش جایگزینی مستقیم و معکوس حل نماید.

۵-۲- پخش بار اصلی

پخش بار سیستم الکتریکی یکی از مهمترین مسائل بررسی شده در مهندسی قدرت است. در واقع پخش بار، محاسبه بار خطوط بر مبنای میزان تولید و تقاضای P, Q و S اندازه گیری شده به ترتیب بر حسب kW ، kVA و $kVAR$ است. شبکه انتقال تقریباً خطی است و لذا انتظار می رود مسأله پخش بار نیز خطی باشد. اما با توجه به رابطه توان الکتریکی $p=v.i$ که حاصل ضرب ولتاژ در جریان است، حتی برای شبکه انتقال خطی،

روابط مسأله غیر خطی خواهد بود. علاوه بر آن استفاده از ولتاژها و جریان‌ها به فرم مختلط به غیر خطی بودن مسأله می‌افزاید. همچنین ممکن است برخی اجزاء غیر خطی مانند تپ چنجر ترانسفورماتور در سیستم موجود باشد. روابط پخش بار شامل تغییرات زمانی بارها و تولیدات و تغییرات توپولوژی شبکه نمی‌شود. بلکه در پخش بار، شرایط به صورت حالت ماندگار سینوسی فرض می‌شود و لذا روابط به شکل جبری نوشته می‌شوند.

۵-۲-۱- روابط پخش بار به روش نیوتن-رافسون

مسأله پخش بار شامل محاسبه توان‌های جاری شده (اکتیو و راکتیو) و ولتاژهای شبکه (دامنه و فاز) برای شرایط خاص شینه‌ها (توان‌های تولیدی و مصرفی) است. فرض بر این است که تمامی ولتاژها و جریان‌ها دارای فرکانس مؤلفه اصلی هستند. هر شینه دارای چهار مقدار زیر است:

• توان اکتیو P

• توان راکتیو Q

• دامنه ولتاژ

• زاویه ولتاژ

شینه‌ها به سه دسته تقسیم می‌شوند و برای هر شینه دو مقدار از چهار مقدار ذکر شده، مشخص است.

• شینه مرجع^۱ که تلفات خطوط انتقال را تأمین می‌کند و در آن دامنه ولتاژ و زاویه ولتاژ مشخص

است که معمولاً دامنه، یک پیونیت و زاویه، صفر فرض می‌شود و زاویه دیگر شینه‌ها نسبت به آن

سنجیده می‌شود.

1- Reference Bus or Swing Bus or Slack Bus

- شینه PV (شینه کنترل ولتاژ) که معمولاً شینه‌های هستند که ژنراتور به آنها متصل است و در آنها توان اکتیو و دامنه ولتاژ مشخص است.

- شینه PQ (شینه بار) که در آنها مقدار توان اکتیو و راکتیو مشخص هستند.

بردار ولتاژ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{x} = [\delta_2, |\bar{V}_2|, \delta_3, |\bar{V}_3|, \dots, \delta_n, |\bar{V}_n|]^t$$

اختلاف توان اصلی^۱:

الگوریتم پخش توان به روش نیوتن-رافسون به گونه‌ای دنبال می‌شود که اختلاف توان‌ها در شینه‌های سیستم صفر گردد. در واقع اختلاف توان در شینه i ام، مجموع توان‌های مختلط خطوط متصل به شینه i ام و توان بار مصرفی مختلط متصل به شینه i ام است.

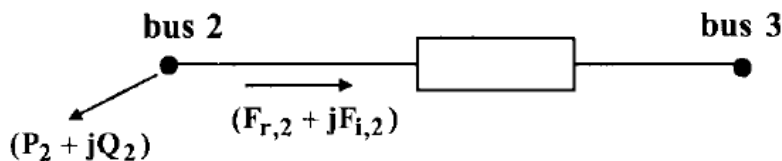
$$\Delta \bar{W} = [P_2 + F_{r,2}, Q_2 + F_{i,2}, \dots, P_n + F_{r,n}, Q_n + F_{i,n}]^t,$$

که در آن P_i و Q_i به ترتیب توان‌های اکتیو و راکتیو بار در شینه i ام و $F_{r,i}$ و $F_{i,i}$ به ترتیب مجموع توان‌های اکتیو و راکتیو خطوط متصل به شینه i ام است که از رابطه زیر بدست می‌آیند.

$$F_{r,i} = \sum_{j=1}^n y_{ij} |V_j| |V_i| \cos(-\theta_{ij} - \delta_j + \delta_i)$$

$$F_{i,i} = \sum_{j=1}^n y_{ij} |V_j| |V_i| \sin(-\theta_{ij} - \delta_j + \delta_i)$$

شکل (۱-۵) تعریف توان در شینه داده شده را بیان می‌کند. دقت شود که $P_2 > 0$ برای مصرف توان اکتیو و $P_2 < 0$ برای تولید توان اکتیو است. به همین ترتیب $Q_2 > 0$ برای مصرف توان راکتیو و $Q_2 < 0$ برای تولید توان راکتیو است.



شکل ۵-۱- تعریف توان در شینه شماره ۲

برای یک سیستم n شینه که شامل یک شینه مرجع و $n-1$ شینه PQ باشد، بردار اختلاف توان $2(n-1)$ سطر دارد.

مسئله پخش بار به این صورت است که بردار X به گونه‌ای پیدا شود که:

$$\Delta \bar{W}(\bar{x}) = 0$$

در صورتیکه رابطه فوق در تکرار اول محقق نشود، با استفاده از روابط زیر که بر مبنای خطی سازی سری تیلور بدست آمده‌اند، می‌توان بردار جدید X را برای استفاده در تکرار بعدی بدست آورد.

$$\Delta \bar{x}^\xi = \bar{J}^{-1} \Delta \bar{W}(\bar{x}^\xi)$$

$$\bar{x}^{\xi+1} = \bar{x}^\xi - \Delta \bar{x}^\xi$$

محاسبه درایه‌های ماتریس ژاکوبین:

ماتریس ژاکوبین بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_2} & \dots & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial \delta_n} & \frac{\partial \Delta P_2}{\partial V_n} \\ \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_2} & \dots & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial \delta_n} & \frac{\partial \Delta Q_2}{\partial V_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \Delta P_n}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta P_n}{\partial V_2} & \dots & \frac{\partial \Delta P_n}{\partial \delta_n} & \frac{\partial \Delta P_n}{\partial V_n} \\ \frac{\partial \Delta Q_n}{\partial \delta_2} & \frac{\partial \Delta Q_n}{\partial V_2} & \dots & \frac{\partial \Delta Q_n}{\partial \delta_n} & \frac{\partial \Delta Q_n}{\partial V_n} \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$\Delta P_i = P_i + F_{r,i} = P_i + \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j V_i \cos(-\theta_{ij} - \delta_j + \delta_i)$$

$$\Delta Q_i = Q_i + F_{i,i} = Q_i + \sum_{j=1}^n y_{ij} V_j V_i \sin(-\theta_{ij} - \delta_j + \delta_i)$$

و

$$\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \delta_i} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij} V_i V_j \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij})$$

$$\frac{\partial \Delta P_i}{\partial \delta_k} = y_{ik} V_i V_k \sin(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) \quad k \neq i$$

$$\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij} V_i V_j \cos(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij})$$

$$\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial \delta_k} = -y_{ik} V_i V_k \cos(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) \quad k \neq i$$

$$\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n y_{ij} V_j \sin(\delta_i - \delta_j - \theta_{ij}) + 2V_i y_{ii} \sin(-\theta_{ii})$$

$$\frac{\partial \Delta Q_i}{\partial V_k} = y_{ik} V_i \sin(\delta_i - \delta_k - \theta_{ik}) \quad k \neq i$$

الگوریتم تکراری حل مسأله پخش بار:

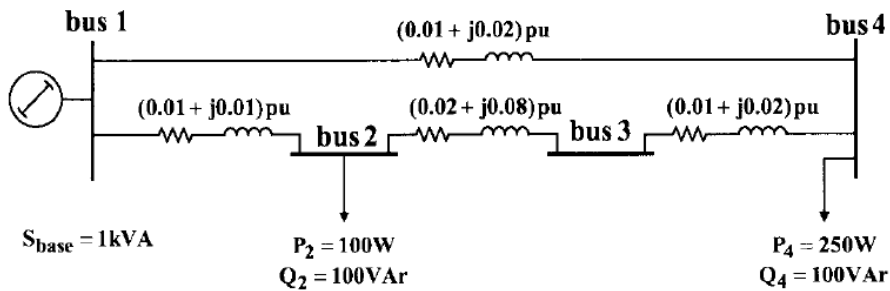
- مرحله اول: محاسبه ماتریس ادمیتانس شبکه Y_{bus}
- مرحله دوم: حدس اولیه برای بردار X (دامنه کلیه ولتاژها یک پریونیت و زاویه‌ها صفر رادیان)

- مرحله سوم: محاسبه بردار اختلاف توان. اگر درایه‌های این بردار به اندازه کافی کوچک باشند، الگوریتم پایان یافته است (درایه‌ها کوچکتر از 10^{-4} باشند).

- مرحله چهارم: محاسبه ماتریس ژاکوبین J و بدست آوردن بردار ΔX (برای مسائل با تعداد شینه‌های کم می‌توان از وارون ماتریس J استفاده کرد و برای سیستم‌های با تعداد شینه‌های زیاد از روش تبدیلات بالا مثلثی و پایین مثلثی و جایگزینی مستقیم و معکوس استفاده می‌شود).

- مرحله پنجم: به روز کردن ΔX و رفتن به مرحله سوم

مثال: شبکه نمونه زیر را در نظر گرفته (شکل ۵-۲) و برنامه پخش بار را بر روی آن اجرا کنید:



شکل ۵-۲- شبکه نمونه چهار شینه با امدانس‌های خطوط پریونیتی

مرحله اول:

$$\bar{Y}_{bus} = \begin{bmatrix} 114.03\text{pu} \angle -0.910\text{rad} & 70.72\text{pu} \angle 2.356\text{rad} & 0 & 44.72\text{pu} \angle 2.034\text{rad} \\ 70.72\text{pu} \angle 2.356\text{rad} & 81.42\text{pu} \angle -0.863\text{rad} & 12.127\text{pu} \angle 1.816\text{rad} & 0 \\ 0 & 12.127\text{pu} \angle 1.816\text{rad} & 56.62\text{pu} \angle -1.154\text{rad} & 44.72\text{pu} \angle 2.034\text{rad} \\ 44.72\text{pu} \angle 2.034\text{rad} & 0 & 44.72\text{pu} \angle 2.034\text{rad} & 89.44\text{pu} \angle -1.1076\text{rad} \end{bmatrix}$$

مرحله دوم:

$$\bar{X}^0 = (\delta_2, |\tilde{V}_2|, \delta_3, |\tilde{V}_3|, \delta_4, |\tilde{V}_4|)^t = (0, 1, 0, 1, 0, 1)^t$$

مرحله سوم:

$$\Delta \bar{W}^0 = (P_2 + F_{r,2}, Q_2 + F_{i,2}, P_3 + F_{r,3}, Q_3 + F_{i,3}, P_4 + F_{r,4}, Q_4 + F_{i,4})^t$$

$$\Delta \bar{W}^0 = (0.0978, 0.0978, -0.0056, -0.00166, 0.2527, 0.1004)^t$$

مرحله چهارم:

$$\bar{J}^0 = \begin{bmatrix} 61.68 & 52.932 & -11.764 & -2.944 & 0 & 0 \\ -52.94 & 61.945 & 2.944 & -11.764 & 0 & 0 \\ -11.764 & -2.944 & 51.772 & 22.917 & -40.0076 & -19.98 \\ 2.944 & -11.764 & -22.926 & 51.773 & 19.982 & -40.0076 \\ 0 & 0 & -40.0076 & -19.982 & 80.015 & 39.961 \\ 0 & 0 & 19.982 & -40.0076 & -39.963 & 80 \end{bmatrix}$$

$$\Delta \bar{X}^0 = J^{-1} \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0.249 \\ 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.68 E - 4 \\ 2.39 E - 3 \\ 2.79 E - 3 \\ 3.57 E - 3 \\ 3.39 E - 3 \\ 4.03 E - 3 \end{bmatrix}$$

مرحله پنجم: محاسبه $\Delta \bar{X}^0$ و به روز کردن $\Delta \bar{W}^1$

$$\Delta \bar{W}^1 = (1.41E-4, 3.01E-4, -9.53E-6, 7.62E-5, 1.20E-3, 5.96E-4,)^t$$

مرحله ششم:

همانطور که مشاهده می شود $\Delta \bar{W}^1$ همگرا نشده است و لذا باید الگوریتم تکرار گردد. الگوریتم فوق پس از دو تکرار دیگر همگرا خواهد شد. نتایج نهایی پخش بار بصورت زیر بدست آمده است.

FUNDAMENTAL LOADFLOW ITERATION SUMMARY

ITERATION	ABSOLUTE REAL POWER MISMATCH				ABSOLUTE REACTIVE POWER MISMATCH			
	AVERAGE	WORST	WORST BUS	HARM	AVERAGE	WORST	WORST BUS	HARM
0	11.67	25.00	4		6.67	10.00	4	
1	0.05	0.12	4		0.03	0.06	4	
2	0.00	0.00	4		0.00	0.00	4	

FUNDAMENTAL LOADFLOW OUTPUT SOLUTION:

FROM BUS	NAME	VOLTAGE	ANGLE	PG	QG	PL	QL	Q SHUNT	TO BUS	NAME	P	Q
1	SWING	100.00	0.00	35.09	20.15	0.00	0.00	0.00	2	LINEAR	13.35	10.69
									4	NONLINEAR	21.73	9.47
2	LINEAR	99.76	-0.02	0.00	0.00	10.00	10.00	0.00	1	SWING	-13.32	-10.66
									3	TRANSFORMER	3.32	0.66
3	TRANSFORMER	99.64	-0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	2	LINEAR	-3.32	-0.65
									4	NONLINEAR	3.32	0.65
4	NONLINEAR	99.59	-0.20	0.00	0.00	25.00	10.00	0.00	3	TRANSFORMER	-3.32	-0.65
									1	SWING	-21.68	-9.35
TOTAL REAL POWER LOSS=			0.09									

۵-۳- پخش بار هارمونیک

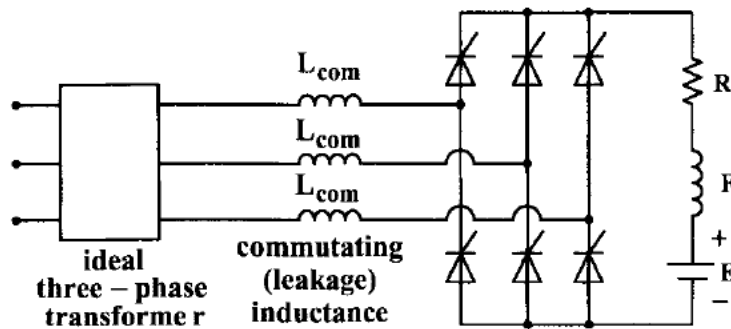
در این قسمت، روابط پخش بار عمومی که در بخش‌های قبلی توضیح داده شد، بسط داده می‌شود تا فرکانس‌های هارمونیک را نیز شامل شود.

مشخصه $V-I$ بار غیر خطی:

ارتباط $V-I$ بارهای غیر خطی (مانند مبدل‌های با کموتاسیون خط) به عنوان منابع جریان هارمونیک مدل می‌شوند. جریان هارمونیک تزریق شده بار غیر خطی ($I_{injected}^h$) در شینه شماره m تابعی از ولتاژهای مؤلفه اصلی و هارمونیک می‌باشد:

$$\begin{cases} \text{Real}(I_{injected}^{(h)}) = g_{r,m}^{(h)}(\tilde{V}_m^{(1)}, \tilde{V}_m^{(5)}, \tilde{V}_m^{(7)}, \dots, \tilde{V}_m^{(L)}, \alpha_m, \beta_m) \\ \text{Imag}(I_{injected}^{(h)}) = g_{i,m}^{(h)}(\tilde{V}_m^{(1)}, \tilde{V}_m^{(5)}, \tilde{V}_m^{(7)}, \dots, \tilde{V}_m^{(L)}, \alpha_m, \beta_m) \end{cases}$$

که در آن α_m و β_m پارامترهای کنترلی بار غیر خطی و L بزرگترین مرتبه هارمونیک در نظر گرفته شده است. به عنوان مثال یک یکسو کننده تمام موج متصل شده به شینه m در شکل (۵-۳) نشان داده شده است که در آن زاویه آتش تریستورها، β_m امپدانس کموتاسیون و E ولتاژ DC است.



شکل ۵-۳- مبدل با کموتاسیون خط با بار عمومی

برای بار غیر فعال، تنها مقاومت R و اندوکتانس فیلتر F و برای درایو موتور DC، تنها R و $E > 0$ در حالت عملکرد موتوری) و برای عملکرد اینورتری با یک منبع DC، تنها R و E در نظر گرفته می‌شوند.

الگوریتم HPF:

- شیشه شماره ۱ به عنوان شیشه مرجع با دامنه ولتاژ $|\tilde{V}_1|$ و زاویه δ_1 در نظر گرفته می‌شود.
- شیشه های شماره ۲ تا $m-1$ شیشه‌های خطی PQ یا PV هستند. فرض بر این است که در آنها توان اکتیو $P_i^{(l)}$ و توان راکتیو $Q_i^{(l)}$ مشخص هستند.
- شیشه‌های m تا n شیشه‌های غیر خطی هستند. در این شیشه‌ها توان اکتیو مؤلفه اصلی $P_i^{(l)}$ و توان ظاهری کلی $S_{i,total}$ (یا توان راکتیو کلی $Q_{i,total}$) مشخص هستند.

بردار ولتاژ شیشه‌ها X در پخش بار اصلی دوباره تعریف می‌شود و بردار U نام می‌گیرد.

$$\begin{aligned} \bar{U} = & [\delta_2^{(1)}, |\tilde{V}_2^{(1)}|, \dots, \delta_n^{(1)}, |\tilde{V}_n^{(1)}|, \delta_1^{(5)}, |\tilde{V}_1^{(5)}|, \dots, \\ & \delta_n^{(5)}, |\tilde{V}_n^{(5)}|, \dots, \delta_1^{(L)}, |\tilde{V}_1^{(L)}|, \dots, \delta_n^{(L)}, |\tilde{V}_n^{(L)}|, \\ & \alpha_m, \beta_m, \dots, \alpha_n, \beta_n]^t = [\bar{V}^{(1)}, \bar{V}^{(5)}, \dots, \bar{V}^{(L)}, \bar{\Phi}]^t \end{aligned}$$

که در آن

- ولتاژهای مؤلفه اصلی:

$$\bar{V}^{(1)} = \delta_2^{(1)}, |\tilde{V}_2^{(1)}|, \dots, \delta_n^{(1)}, |\tilde{V}_n^{(1)}|$$

- ولتاژهای هارمونیک مرتبه پنجم:

$$\bar{V}^{(5)} = \delta_1^{(5)}, |\tilde{V}_1^{(5)}|, \dots, \delta_n^{(5)}, |\tilde{V}_n^{(5)}|$$

- ولتاژهای هارمونیک مرتبه L ام:

$$\bar{V}^{(L)} = \delta_1^{(L)}, |\tilde{V}_1^{(L)}|, \dots, \delta_n^{(L)}, |\tilde{V}_n^{(L)}|$$

- متغیرهای بار غیر خطی:

$$\bar{\Phi} = \alpha_m, \beta_m, \dots, \alpha_n, \beta_n$$

روابط موجود در پخش بار عمومی برای حل پخش بار هارمونیک کافی نیست و دو دسته رابطه دیگر

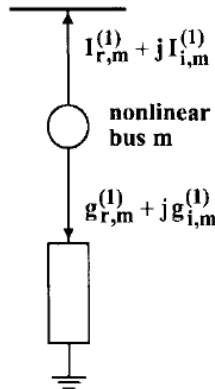
باید به مجموعه روابط موجود اضافه گردد که عبارتند از:

- برای هر هارمونیک در کلیه شینه‌ها (تعداد جریانی) که برای مؤلفه اصلی فقط در شینه‌های غیر خطی نوشته می‌شود.

- تعادل توان ظاهری در شینه‌های غیر خطی

تعادل جریانی مؤلفه اصلی:

تعادل جریانی برای فرکانس مؤلفه اصلی ($h=1$) در شینه‌های غیر خطی (شکل ۴-۵) نوشته شده است که جریانات غیر خطی $g_{r,m}^{(1)}$ و $g_{i,m}^{(1)}$ مربوط به شینه شماره m هستند. لذا برای شینه‌های غیر خطی (از m تا n) برای مؤلفه اصلی جریانات می‌توان رابطه زیر را نوشت:



شکل ۴-۵ کاربرد تعادل جریان در شینه غیر خطی ($I_{r,m}^{(1)} + j I_{i,m}^{(1)} + g_{r,m}^{(1)} + j g_{i,m}^{(1)} = 0$)

$$\begin{bmatrix} I_{r,m}^{(1)} \\ I_{i,m}^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ I_{r,n}^{(1)} \\ I_{i,n}^{(1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_{r,m}^{(1)}(\tilde{V}_m^{(1)}, \tilde{V}_m^{(5)}, \dots, \tilde{V}_m^{(L)}, \alpha_m, \beta_m) \\ g_{i,m}^{(1)}(\tilde{V}_m^{(1)}, \tilde{V}_m^{(5)}, \dots, \tilde{V}_m^{(L)}, \alpha_m, \beta_m) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{r,n}^{(1)}(\tilde{V}_n^{(1)}, \tilde{V}_n^{(5)}, \dots, \tilde{V}_n^{(L)}, \alpha_n, \beta_n) \\ g_{i,n}^{(1)}(\tilde{V}_n^{(1)}, \tilde{V}_n^{(5)}, \dots, \tilde{V}_n^{(L)}, \alpha_n, \beta_n) \end{bmatrix}$$

که در آن $I_{r,m}^{(1)}$ و $I_{i,m}^{(1)}$ جریانات خط اکتیو و راکتیو مؤلفه اصلی در شینه غیر خطی m و $g_{r,m}^{(1)}$ و

$g_{i,m}^{(1)}$ جریانات تزریقی اکتیو و راکتیو مؤلفه اصلی بار در همان شینه است.

تعداد جریانی هارمونیک:

برای کلیه شینه‌ها (اعم از خطی و غیر خطی) می‌توان رابطه زیر را نوشت:

$$\begin{bmatrix} I_{r,1}^{(h)} \\ I_{i,1}^{(h)} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{r,m-1}^{(h)} \\ I_{i,m-1}^{(h)} \\ \hline I_{r,m}^{(h)} \\ I_{i,m}^{(h)} \\ \vdots \\ \vdots \\ I_{r,n}^{(h)} \\ I_{i,n}^{(h)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{(swing bus and linear buses)} \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \hline g_{r,m}^{(h)}(\tilde{V}_m^{(1)}, \tilde{V}_m^{(5)}, \dots, \tilde{V}_m^{(L)}, \alpha_m, \beta_m) \\ g_{i,m}^{(h)}(\tilde{V}_m^{(1)}, \tilde{V}_m^{(5)}, \dots, \tilde{V}_m^{(L)}, \alpha_m, \beta_m) \\ \vdots \\ \text{(nonlinear buses)} \\ \vdots \\ g_{r,n}^{(h)}(\tilde{V}_n^{(1)}, \tilde{V}_n^{(5)}, \dots, \tilde{V}_n^{(L)}, \alpha_n, \beta_n) \\ g_{i,n}^{(h)}(\tilde{V}_n^{(1)}, \tilde{V}_n^{(5)}, \dots, \tilde{V}_n^{(L)}, \alpha_n, \beta_n) \end{bmatrix}$$

که در آن $I_{r,m}^{(h)}$ و $I_{i,m}^{(h)}$ در قسمت‌های بعدی محاسبه می‌شوند.

تعداد توان ظاهری:

تعداد ولت آمپر در هر شینه غیر خطی j بصورت زیر نوشته می‌شود:

$$S_j^2 = (P_j^t)^2 + (Q_j^t)^2 + D_j^2$$

که در آن

$$(P_j^t)^2 = \left(\sum_h P_j^{(h)} \right)^2 = (V_j^{(1)} I_j^{(1)} \cos \theta_j^{(1)} + V_j^{(5)} I_j^{(5)} \cos \theta_j^{(5)} + V_j^{(7)} I_j^{(7)} \cos \theta_j^{(7)} + \dots)^2$$

$$(Q_j^t)^2 = \left(\sum_h Q_j^{(h)} \right)^2 = (V_j^{(1)} I_j^{(1)} \sin \theta_j^{(1)} + V_j^{(5)} I_j^{(5)} \sin \theta_j^{(5)} + V_j^{(7)} I_j^{(7)} \sin \theta_j^{(7)} + \dots)^2$$

و D_m تا D_n با استفاده از $g_{r,m}$, $g_{i,m}$, \dots , $g_{r,n}$ و $g_{i,n}$ محاسبه خواهند شد.

تعداد مجهول‌ها برای یک سیستم n شینه که از شینه شماره m تا n آن، شینه‌های غیر خطی هستند، به

قرار زیر می‌باشد (K تعداد هارمونیک‌های در نظر گرفته شده به غیر از مؤلفه اصلی است، مثلاً برای

$h=1,5,7,11$ مقدار $K=3$ می‌باشد):

- دامنه‌های ولتاژ و زاویه‌های آنها برای مؤلفه اصلی شینه‌ها بجز شینه مرجع $2(n-1)$
- توان‌های اکتیو و راکتیو مؤلفه اصلی در شینه مرجع 2
- دامنه‌های ولتاژ و زاویه‌های آنها برای مؤلفه هارمونیک کلیه شینه‌ها $2nK$
- توان‌های راکتیو کلی Q_j^t در شینه‌های غیر خطی $n-(m-1)=(n-m+1)$
- دو متغیر α_j و β_j مربوط به شینه‌های غیر خطی $2(n-m+1)$
- مجموع کلی تعداد مجهول‌ها $2n(K+1)+3(n-m+1)$

تعداد روابط موجود برای بدست آوردن متغیرهای مجهول نیز به قرار زیر است:

- تعادل توان‌های P و Q در $m-1$ شینه خطی به غیر از شینه مرجع $2(m-1)$
- دامنه ولتاژ و زاویه آن برای مؤلفه اصلی در شینه مرجع 2
- تعادل مؤلفه‌های حقیقی و موهومی جریان مؤلفه اصلی در شینه‌های غیر خطی $2(n-(m-1))$
- تعادل مؤلفه‌های حقیقی و موهومی جریان‌های هارمونیک در کلیه شینه‌ها $2nK$
- تعادل ولت آمپر ظاهری در شینه‌های غیر خطی به منظور محاسبه توان راکتیو (در صورت مشخص بودن توان راکتیو در شینه‌های غیر خطی نیاز به محاسبه نیست). $n-(m-1)$
- مجموع کلی تعداد روابط $2n(K+1)+(n-m+1)$

تعداد $2(n-m+1)$ رابطه باقی می‌ماند که از اختلاف توان‌های اکتیو و راکتیو شینه‌های غیر خطی بدست می‌آیند:

$$\Delta P_j^{\text{nonlinear}} = P_j^t + \sum_h F_{r,j}^{(h)}$$

$$\Delta Q_j^{\text{nonlinear}} = Q_j^t + \sum_h F_{i,j}^{(h)}$$

که در آن P_j^t و Q_j^t توان‌های اکتیو و راکتیو غیر خطی کلی (مؤلفه اصلی و هارمونیک) در شینه z است.

$$\sum_h F_{r,j}^{(h)} \text{ و } \sum_h F_{i,j}^{(h)}$$

بردار اختلاف برای **HPF**:

بردار اختلاف (شامل اختلاف توان و اختلاف جریان) برای پخش بار هارمونیک بصورت زیر تعریف

می‌گردد:

$$\Delta \bar{M} = [\Delta \bar{W}, \Delta \bar{I}^{(5)}, \dots, \Delta \bar{I}^{(L)}, \Delta \bar{I}^{(1)}]^t$$

که در آن

$$\Delta \bar{W} = (P_2^{(1)} + F_{r,2}^{(1)}, Q_2^{(1)} + F_{i,2}^{(1)}, \dots, P_{m-1}^{(1)} + F_{r,m-1}^{(1)}, Q_{m-1}^{(1)} + F_{i,m-1}^{(1)}, \\ \Delta P_m^{nonlinear}, \Delta Q_m^{nonlinear}, \dots, \Delta P_n^{nonlinear}, \Delta Q_n^{nonlinear})^t$$

و

$$\Delta \bar{I}^{(1)} = (I_{r,m}^{(1)} + G_{r,m}^{(1)}, I_{i,m}^{(1)} + G_{i,m}^{(1)}, \dots, I_{r,n}^{(1)} + G_{r,n}^{(1)}, I_{i,n}^{(1)} + G_{i,n}^{(1)})^t \\ \Delta \bar{I}^{(h)} = (I_{r,1}^{(h)}, I_{i,1}^{(h)}, \dots, I_{r,m-1}^{(h)}, I_{i,m-1}^{(h)}, I_{r,m}^{(h)} + G_{r,m}^{(h)}, I_{i,m}^{(h)} + G_{i,m}^{(h)}, \dots, \\ I_{r,n}^{(h)} + G_{r,n}^{(h)}, I_{i,n}^{(h)} + G_{i,n}^{(h)})^t$$

$G_{i,m}^{(h)}$ و $G_{r,m}^{(h)}$ مؤلفه‌های حقیقی و موهومی جریان بار غیر خطی ارجاع شده به شینه مرجع، مشخص

هستند و $I_{i,m}^{(h)}$ و $I_{r,m}^{(h)}$ بدست خواهند آمد.

روش نیوتن-رافسون بکار گرفته می‌شود تا با استفاده از ماتریس ژاکوبین، بردار اختلاف به سمت صفر

میل کند.

$$\Delta \bar{U}^{(\xi)} = \bar{U}^{(\xi)} - \bar{U}^{(\xi+1)}$$

$$\Delta \bar{M} = J \Delta \bar{U}^{(\xi)}$$

ماتریس ژاکوبین J که ابعاد آن $2(nK+n-1)+2(n-m+1) \times 2(nK+n-1)+2(n-m+1)$ است، بصورت

تعریف می‌شود:

$$\Delta \bar{M} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{W} \\ \Delta \bar{I}^{(5)} \\ \Delta \bar{I}^{(7)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \bar{I}^{(L)} \\ \Delta \bar{I}^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}^{(1)} & \bar{J}^{(5)} & \cdot & \cdot & \bar{J}^{(L)} & 0 \\ \overline{YG}^{(5,1)} & \overline{YG}^{(5,5)} & \cdot & \cdot & \overline{YG}^{(5,L)} & \bar{H}^{(5)} \\ \overline{YG}^{(7,1)} & \overline{YG}^{(7,5)} & \cdot & \cdot & \overline{YG}^{(7,L)} & \bar{H}^{(7)} \\ \vdots & \vdots & \cdot & \cdot & \vdots & \vdots \\ \overline{YG}^{(L,1)} & \overline{YG}^{(L,5)} & \cdot & \cdot & \overline{YG}^{(L,L)} & \bar{H}^{(L)} \\ \overline{YG}^{(1,1)} & \overline{YG}^{(1,5)} & \cdot & \cdot & \overline{YG}^{(1,L)} & \bar{H}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \bar{V}^{(1)} \\ \Delta \bar{V}^{(5)} \\ \Delta \bar{V}^{(7)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \bar{V}^{(L)} \\ \Delta \bar{\Phi} \end{bmatrix}$$

$$\Delta \bar{U} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{V}^{(1)} \\ \Delta \bar{V}^{(5)} \\ \Delta \bar{V}^{(7)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \bar{V}^{(L)} \\ \Delta \bar{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}^{(1)} & \bar{J}^{(5)} & \cdot & \cdot & \bar{J}^{(L)} & 0 \\ \overline{YG}^{(5,1)} & \overline{YG}^{(5,5)} & \cdot & \cdot & \overline{YG}^{(5,L)} & \bar{H}^{(5)} \\ \overline{YG}^{(7,1)} & \overline{YG}^{(7,5)} & \cdot & \cdot & \overline{YG}^{(7,L)} & \bar{H}^{(7)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overline{YG}^{(L,1)} & \overline{YG}^{(L,5)} & \cdot & \cdot & \overline{YG}^{(L,L)} & \bar{H}^{(L)} \\ \overline{YG}^{(1,1)} & \overline{YG}^{(1,5)} & \cdot & \cdot & \overline{YG}^{(1,L)} & \bar{H}^{(1)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta \bar{W} \\ \Delta \bar{I}^{(5)} \\ \Delta \bar{I}^{(7)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \Delta \bar{I}^{(L)} \\ \Delta \bar{I}^{(1)} \end{bmatrix}$$

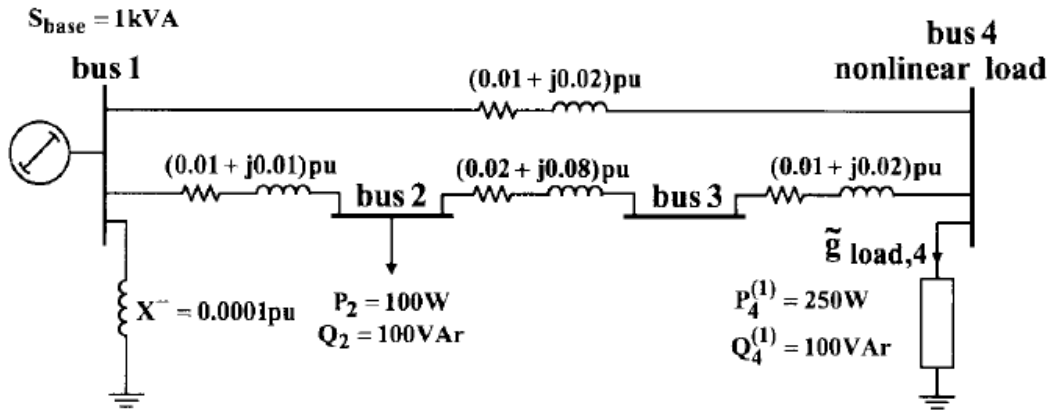
در مورد چگونگی تشکیل ماتریس ژاکوبین در پخش بار هارمونیک، در زمان حل مثال مطرح شده در

این قسمت، به طور کامل توضیح داده خواهد شد.

خلاصه الگوریتم پخش بار هارمونیک:

- مرحله اول: انجام پخش بار اصلی روی شبکه مورد نظر
- مرحله دوم: محاسبه $g_{i,m}^{(h)}$ و $g_{r,m}^{(h)}$ برای بارهای غیر خطی
- مرحله سوم: محاسبه بردار اختلاف، اگر درایه‌های آن کوچک است الگوریتم متوقف می‌شود.
- مرحله چهارم: محاسبه ماتریس J و $\Delta \bar{U}$ با استفاده از روش جایگزینی مستقیم و معکوس
- مرحله پنجم: به روز کردن \bar{U} با استفاده از رابطه $\bar{U}^{(1)} = \bar{U}^{(0)} - \Delta \bar{U}^{(1)}$
- مرحله ششم: به روز کردن توان‌های کلی (Q_j^l و P_j^l) در شینه‌های غیر خطی
- مرحله هفتم: رفتن به مرحله دوم

مثال: شبکه نمونه زیر را در نظر گرفته (شکل ۵-۵) و برنامه پخش بار هارمونیکی را بر روی آن اجرا کنید:



شکل ۵-۵- شبکه نمونه چهار شینه با یک شینه دارای بار غیر خطی که در آن $n=m=4$

که مشخصه $V-I$ بار هارمونیکی در شینه شماره ۴ بصورت زیر است:

$$g_{r,4}^{(5)} = 0.3(V_4^{(1)})^3 \cos(3\delta_4^{(1)}) + 0.3(V_4^{(5)})^2 \cos(3\delta_4^{(5)}),$$

$$g_{i,4}^{(5)} = 0.3(V_4^{(1)})^3 \sin(3\delta_4^{(1)}) + 0.3(V_4^{(5)})^2 \sin(3\delta_4^{(5)})$$

حل:

ماتریس ادمیتانس مؤلفه اصلی شینه‌ها در بخش قبلی محاسبه شده است (امپدانس X^- برای مقادیر اصلی

وجود ندارد). ماتریس ادمیتانس هارمونیکی شینه‌ها برای هارمونیک مرتبه پنجم با در نظر گرفتن X^-

بصورت زیر خواهد بود.

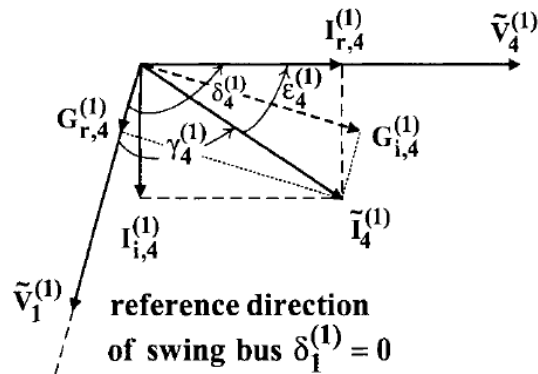
$$y_{11}^{(5)} = \frac{1}{0.01 + j(0.02 \times 5)} + \frac{1}{0.01 + j(0.01 \times 5)} + \frac{1}{j(0.0001 \times 5)} = 0.9901 - j9.901 + 3.846 - j19.231 - j2000$$

به همین ترتیب درایه‌های دیگر ماتریس ادمیتانس هارمونیکی محاسبه می‌شوند.

$$\bar{Y}_{bus}^{(5)} = \begin{bmatrix} 2029.137 \text{pu} \angle -1.5684 \text{rad} & 19.61 \text{pu} \angle 1.7681 \text{rad} & 0 & 9.9503 \text{pu} \angle 1.6704 \text{rad} \\ 19.61 \text{pu} \angle 1.7681 \text{rad} & 22.0847 \text{pu} \angle -1.3900 \text{rad} & 2.4969 \text{pu} \angle 1.62066 \text{rad} & 0 \\ 0 & 2.4969 \text{pu} \angle 1.62066 \text{rad} & 12.445 \text{pu} \angle -1.4811 \text{rad} & 9.9504 \text{pu} \angle 1.6704 \text{rad} \\ 9.9503 \text{pu} \angle 1.6704 \text{rad} & 0 & 9.9504 \text{pu} \angle 1.6704 \text{rad} & 19.901 \text{pu} \angle -1.4711 \text{rad} \end{bmatrix}$$

قسمت حقیقی و موهومی مؤلفه اصلی جریان غیر خطی $G_{r,4}^{(1)}$ و $G_{i,4}^{(1)}$ ارجاع شده به شینه مرجع،

بصورت زیر محاسبه می‌شود. شکل (۶-۵) دیاگرام فازوری برای مؤلفه اصلی را نشان می‌دهد.



شکل ۶-۵- دیاگرام فازوری برای مؤلفه اصلی

$$P_4^{(1)} = V_4^{(1)} I_4^{(1)} \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})$$

$$Q_4^{(1)} = V_4^{(1)} I_4^{(1)} \sin(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})$$

که در آن

$$\gamma_4^{(1)} = \delta_4^{(1)} - \tan^{-1}\left(\frac{Q_4^{(1)}}{P_4^{(1)}}\right)$$

$$G_{r,4}^{(1)} = I_4^{(1)} \cos \gamma_4^{(1)}$$

$$I_4^{(1)} = \frac{P_4^{(1)}}{V_4^{(1)} \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})}$$

$$G_{r,4}^{(1)} = \frac{P_4^{(1)} \cos \gamma_4^{(1)}}{V_4^{(1)} \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})}$$

به همین ترتیب برای قسمت موهومی

$$G_{i,4}^{(1)} = \frac{P_4^{(1)} \sin \gamma_4^{(1)}}{V_4^{(1)} \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})}$$

قسمت حقیقی و موهومی مرفه پنجم هارمونیکي جریان غیر خطی $g_{r,4}^{(1)}$ و $g_{i,4}^{(1)}$ ارجاع شده به شینه

شماره ۴، بصورت زیر می‌باشد.

$$g_{r,4}^{(5)} = 0.3(V_4^{(1)})^3 \cos(3\delta_4^{(1)}) + 0.3(V_4^{(5)})^2 \cos(3\delta_4^{(5)}),$$

$$g_{i,4}^{(5)} = 0.3(V_4^{(1)})^3 \sin(3\delta_4^{(1)}) + 0.3(V_4^{(5)})^2 \sin(3\delta_4^{(5)})$$

$$I_4^{(5)} = \sqrt{(g_{r,4}^{(5)})^2 + (g_{i,4}^{(5)})^2}$$

مرحله اول: با استفاده از بردار ولتاژ X بدست آمده از پخش بار اصلی و همچنین با فرض دامنه‌های ولتاژ

هارمونیکی ۱/۰ پریونیت و زاویه ولتاژ صفر رادیان، بردار ولتاژ \bar{U}^0 بصورت زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{U}^0 = (\delta_2^{(1)}, V_2^{(1)}, \delta_3^{(1)}, V_3^{(1)}, \delta_4^{(1)}, V_4^{(1)}, \delta_1^{(5)}, V_1^{(5)}, \delta_2^{(5)}, V_2^{(5)}, \delta_3^{(5)}, V_3^{(5)}, \delta_4^{(5)}, V_4^{(5)}, \alpha_4, \beta_4)^t$$

$$\bar{U}^0 = (-2.671 \cdot 10^{-4}, 0.9976, -2.810 \cdot 10^{-3}, 0.9964, -3.414 \cdot 10^{-3}, 0.9960, 0, 0.1, 0, 0.1, 0, 0.1, 0, 0.1, 0, 0)^t$$

بدلیل اینکه بار غیر خطی شینه شماره ۴ تابعی از α و β نیست، لذا آنها صفر در نظر گرفته شده‌اند.

مرحله دوم: با توجه به $P_4^{(1)} = 250W = 0.25 pu$ ، $Q_4^{(1)} = 10Var = 0.1 pu$ ، $V_4^{(1)} = 0.9960 pu$ و

$$\delta_4^{(1)} = -3.414 \cdot 10^{-3} \text{ radians داریم:}$$

$$\varepsilon_4^{(1)} = \tan^{-1}\left(\frac{Q_4^{(1)}}{P_4^{(1)}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{0.1}{0.25}\right) = 0.3805 \text{ rad}$$

$$\gamma_4^{(1)} = \delta_4^{(1)} - \varepsilon_4^{(1)} = (-0.003414 - 0.3805) = -0.38391 \text{ rad}$$

$$G_{r,4}^{(1)} = \frac{P_4^{(1)} \cos(\gamma_4^{(1)})}{V_4^{(1)} \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})} = \frac{0.25 \cdot \cos(-0.38391)}{0.9960 \cdot \cos(-0.003414 - 0.38391)} = 0.2514 pu$$

$$G_{i,4}^{(1)} = \frac{P_4^{(1)} \sin(\gamma_4^{(1)})}{V_4^{(1)} \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})} = \frac{0.25 \cdot \sin(-0.38391)}{0.9960 \cdot \cos(-0.003414 - 0.38391)} = -0.1015 pu$$

$$I_4^{(1)} = \sqrt{(G_{r,4}^{(1)})^2 + (G_{i,4}^{(1)})^2} = \sqrt{(0.2514)^2 + (-0.1015)^2} = 0.2711 pu$$

$$g_{r,4}^{(5)} = 0.3(0.9960)^3 \cos(-3 \cdot 0.003414) + 0.3(0.1)^2 \cos(3 \cdot 0) = 0.2994 pu$$

$$g_{i,4}^{(5)} = 0.3(0.9960)^3 \sin(-3 \cdot 0.003414) + 0.3(0.1)^2 \sin(3 \cdot 0) = -0.003036 pu$$

$$I_4^{(5)} = \sqrt{(g_{r,4}^{(5)})^2 + (g_{i,4}^{(5)})^2} = \sqrt{(0.2994)^2 + (-0.003036)^2} = 0.2994 pu$$

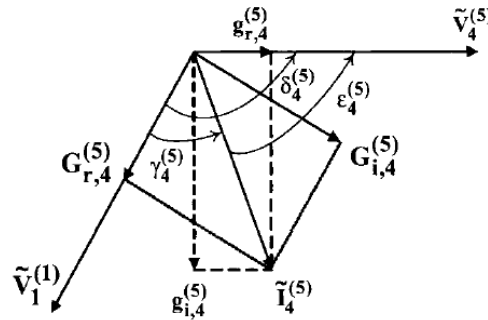
$$\varepsilon_4^{(5)} = \tan^{-1}\left(\frac{|g_{i,4}^{(5)}|}{|g_{r,4}^{(5)}|}\right) = 0.01014 \text{ rad}$$

جریان‌های هارمونیک پنجم در شینه شماره ۴ ارجاع شده به شینه مرجع به قرار زیر است:

$$G_{r,4}^{(5)} = I_4^{(5)} \cos \gamma_4^{(5)}$$

$$G_{i,4}^{(5)} = I_4^{(5)} \sin \gamma_4^{(5)}$$

شکل (۷-۵) دیاگرام فازوری برای هارمونیک پنجم را نشان می‌دهد.



شکل ۷-۵- دیاگرام فازوری برای هارمونیک پنجم

با توجه به شکل فوق می‌توان نوشت:

$$\delta_4^{(5)} = \epsilon_4^{(5)} + \gamma_4^{(5)}$$

$$\gamma_4^{(5)} = \delta_4^{(5)} - \epsilon_4^{(5)} = 0 - \epsilon_4^{(5)} = -0.01014 \text{ rad}$$

$$G_{r,4}^{(5)} = 0.2994 \text{ pu}$$

$$G_{i,4}^{(5)} = -0.003036 \text{ pu}$$

بدلیل اینکه $\gamma_4^{(5)}$ در این تکرار کوچک است، جریان‌های غیر خطی ارجاع شده به شینه مرجع با

جریان‌های غیر خطی ارجاع شده به شینه شماره ۴ تقریباً یکسان است.

همچنین داریم:

$$P_4^{(1)} = I_4^{(1)} V_4^{(1)} \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)}) = 0.2711 \cdot 0.9960 \cdot \cos(-0.003414 + 0.38391) = 0.250 \text{ pu}$$

$$Q_4^{(1)} = I_4^{(1)} V_4^{(1)} \sin(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)}) = 0.2711 \cdot 0.9960 \cdot \sin(-0.003414 + 0.38391) = 0.100 \text{ pu}$$

$$P_4^{(5)} = I_4^{(5)} V_4^{(5)} \cos(\delta_4^{(5)} - \gamma_4^{(5)}) = 0.2994 \cdot 0.1 \cdot \cos(0 + 0.01014) = 0.02994 \text{ pu}$$

$$Q_4^{(5)} = I_4^{(5)} V_4^{(5)} \sin(\delta_4^{(5)} - \gamma_4^{(5)}) = 0.2994 \cdot 0.1 \cdot \sin(0 + 0.01014) = 0.000304 \text{ pu}$$

بنابراین توان‌های اکتیو و راکتیو تزریق شده کلی به شینه شماره ۴ بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$P_4^t = P_4^{(1)} + P_4^{(5)} = 0.250 \text{ pu} + 0.02994 \text{ pu} = 0.27994 \text{ pu}$$

$$Q_4^t = Q_4^{(1)} + Q_4^{(5)} = 0.100 \text{ pu} + 0.000304 \text{ pu} = 0.100304 \text{ pu}$$

مرحله سوم: محاسبه بردار اختلاف

$$\begin{aligned}\Delta \bar{M}^0 &= (\Delta \bar{W}, \Delta \bar{I}^{(5)}, \Delta \bar{I}^{(1)})^t \\ &= (P_2^{(1)} + F_{r,2}^{(1)}, Q_2^{(1)} + F_{i,2}^{(1)}, P_3^{(1)} + F_{r,3}^{(1)}, Q_3^{(1)} + F_{i,3}^{(1)}, P_4 + F_{r,4}^{(1)} + F_{r,4}^{(5)}, Q_4 + F_{i,4}^{(1)} + F_{i,4}^{(5)}, \\ &I_{r,1}^{(5)}, I_{i,1}^{(5)}, I_{r,2}^{(5)}, I_{i,2}^{(5)}, I_{r,3}^{(5)}, I_{i,3}^{(5)}, I_{r,4}^{(5)} + G_{r,4}^{(5)}, I_{i,4}^{(5)} + G_{i,4}^{(5)}, I_{r,4}^{(1)} + G_{r,4}^{(1)}, I_{i,4}^{(1)} + G_{i,4}^{(1)})^t\end{aligned}$$

به منظور محاسبه بردار اختلاف از روابط زیر استفاده می شود:

$$\begin{aligned}\Delta P_i &= P_i + F_{r,i} = P_i + \sum_{j=1}^n y_{ij} |\tilde{V}_j| |\tilde{V}_i| \cos(-\theta_{ij} - \delta_j + \delta_i) \\ \Delta Q_i &= Q_i + F_{i,i} = Q_i + \sum_{j=1}^n y_{ij} |\tilde{V}_j| |\tilde{V}_i| \sin(-\theta_{ij} - \delta_j + \delta_i) \\ \Delta I_{r,i}^{(h)} &= I_{r,i}^{(h)} + G_{r,i}^{(h)} = \sum_{j=1}^n y_{ij}^{(h)} |\tilde{V}_j^{(h)}| \cos(\theta_{ij}^{(h)} + \delta_j^{(h)}) + G_{r,i}^{(h)} \\ \Delta I_{i,i}^{(h)} &= I_{i,i}^{(h)} + G_{i,i}^{(h)} = \sum_{j=1}^n y_{ij}^{(h)} |\tilde{V}_j^{(h)}| \sin(\theta_{ij}^{(h)} + \delta_j^{(h)}) + G_{i,i}^{(h)}\end{aligned}$$

از این رو داریم:

$$\begin{aligned}\Delta P_2^{(1)} &= P_2^{(1)} + F_{r,2}^{(1)} = P_2 + y_{21} V_1 V_2 \cos(-\theta_{21} - \delta_1 + \delta_2) + y_{22} V_2 V_2 \cos(-\theta_{22} - \delta_2 + \delta_2) \\ &+ y_{23} V_3 V_2 \cos(-\theta_{23} - \delta_3 + \delta_2) + y_{24} V_4 V_2 \cos(-\theta_{24} - \delta_4 + \delta_2) \\ &= 0.1 + 70.72 \cdot 1 \cdot 0.9976 \cos(-2.356 - 0 - 0.000267) \\ &+ 81.42 \cdot (0.9976)^2 \cos(0.863 + 0.000267 - 0.000267) \\ &+ 12.127 \cdot 0.9964 \cdot 0.9976 \cos(-1.816 + 0.00281 - 0.000267) + 0 = -0.0170 \text{ pu},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta Q_2^{(1)} &= Q_2^{(1)} + F_{i,2}^{(1)} = Q_2 + y_{21} V_1 V_2 \sin(-\theta_{21} - \delta_1 + \delta_2) + y_{22} V_2 V_2 \sin(-\theta_{22} - \delta_2 + \delta_2) \\ &+ y_{23} V_3 V_2 \sin(-\theta_{23} - \delta_3 + \delta_2) + y_{24} V_4 V_2 \sin(-\theta_{24} - \delta_4 + \delta_2) \\ &= 0.1 + 70.72 \cdot 1 \cdot 0.9976 \sin(-2.356 - 0 - 0.000267) \\ &+ 81.42 \cdot (0.9976)^2 \sin(0.863 + 0.000267 - 0.000267) \\ &+ 12.127 \cdot 0.9964 \cdot 0.9976 \sin(-1.816 + 0.00281 - 0.000267) + 0 = 0.083 \text{ pu}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta P_3^{(1)} &= P_3^{(1)} + F_{r,3}^{(1)} = P_3 + y_{31}V_1V_3 \cos(-\theta_{31} - \delta_1 + \delta_3) + y_{32}V_2V_3 \cos(-\theta_{32} - \delta_2 + \delta_3) \\
&+ y_{33}V_3V_3 \cos(-\theta_{33} - \delta_3 + \delta_3) + y_{34}V_4V_3 \cos(-\theta_{34} - \delta_4 + \delta_3) \\
&= 0 + 0 + 12.127 \cdot 1 \cdot 0.9976 \cdot 0.9964 \cos(-1.816 + 0.000267 - 0.00281) \\
&+ 56.62 \cdot (0.9964)^2 \cos(1.154 + 0.00281 - 0.00281) \\
&+ 44.72 \cdot 0.9959 \cdot 0.9964 \cos(-2.034 + 0.00341 - 0.00281) = -0.00325 \text{ pu} ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta Q_3^{(1)} &= Q_3^{(1)} + F_{i,3}^{(1)} = Q_3 + y_{31}V_1V_3 \sin(-\theta_{31} - \delta_1 + \delta_3) + y_{32}V_2V_3 \sin(-\theta_{32} - \delta_2 + \delta_3) \\
&+ y_{33}V_3V_3 \sin(\theta_{33} - \delta_3 + \delta_3) + y_{34}V_4V_3 \sin(-\theta_{34} - \delta_4 + \delta_3), \\
&= 0 + 0 + 12.127 \cdot 0.9976 \cdot 0.9964 \sin(-1.816 + 0.000267 - 0.00281) \\
&+ 56.62 \cdot (0.9964)^2 \sin(1.154 + 0.00281 - 0.00281) \\
&+ 44.72 \cdot 0.9959 \cdot 0.9964 \sin(-2.034 + 0.00341 - 0.00281) = 0.00192 \text{ pu} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta P_4^t &= P_4^t + F_{r,4}^{(1)} + F_{r,4}^{(5)} = P_4^t + \sum_{j=1}^4 y_{4j}V_j^{(1)}V_4^{(1)} \cos(-\theta_{4j} - \delta_j^{(1)} + \delta_4^{(1)}) \\
&+ \sum_{j=1}^4 y_{4j}^{(5)}V_j^{(5)}V_4^{(5)} \cos(-\theta_{4j}^{(5)} - \delta_j^{(5)} + \delta_4^{(5)}), \\
&= P_4^t + y_{41}V_1^{(1)}V_4^{(1)} \cos(-\theta_{41} - \delta_1^{(1)} + \delta_4^{(1)}) + y_{43}V_3^{(1)}V_4^{(1)} \cos(-\theta_{43} - \delta_3^{(1)} + \delta_4^{(1)}) \\
&+ y_{44}V_4^{(1)}V_4^{(1)} \cos(-\theta_{44} - \delta_4^{(1)} + \delta_4^{(1)}) + y_{41}^{(5)}V_1^{(5)}V_4^{(5)} \cos(-\theta_{41}^{(5)} - \delta_1^{(5)} + \delta_4^{(5)}) \\
&+ y_{43}^{(5)}V_3^{(5)}V_4^{(5)} \cos(-\theta_{43}^{(5)} - \delta_3^{(5)} + \delta_4^{(5)}) + y_{44}^{(5)}V_4^{(5)}V_4^{(5)} \cos(-\theta_{44}^{(5)} - \delta_4^{(5)} + \delta_4^{(5)}), \\
&= 0.27994 + 44.72 \cdot 1 \cdot 0.9959 \cos(-2.034 - 0 - 0.00341) \\
&+ 44.72 \cdot 0.9964 \cdot 0.9959 \cos(-2.034 - 0.00281 - 0.00341) \\
&+ 89.44 \cdot (0.9959)^2 \cos(1.1076 + 0.00341 - 0.00341) \\
&+ 9.95 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot \cos(-1.6704 - 0 + 0) + 9.95 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot \cos(-1.6704 - 0 + 0) \\
&+ 19.901 \cdot (0.1)^2 \cos(1.4711 - 0 + 0) = 0.037 \text{ pu} .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta Q_4^t &= Q_4^t + F_{i,4}^{(1)} + F_{i,4}^{(5)} = Q_4^t + \sum_{j=1}^4 y_{4j}V_j^{(1)}V_4^{(1)} \sin(-\theta_{4j} - \delta_j^{(1)} + \delta_4^{(1)}) \\
&+ \sum_{j=1}^4 y_{4j}^{(5)}V_j^{(5)}V_4^{(5)} \sin(-\theta_{4j}^{(5)} - \delta_j^{(5)} + \delta_4^{(5)}), \\
&= Q_4^t + y_{41}V_1^{(1)}V_4^{(1)} \sin(-\theta_{41} - \delta_1^{(1)} + \delta_4^{(1)}) + y_{43}V_3^{(1)}V_4^{(1)} \sin(-\theta_{43} - \delta_3^{(1)} + \delta_4^{(1)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + y_{44}V_4^{(1)}V_4^{(1)} \sin(-\theta_{44} - \delta_4^{(1)} + \delta_4^{(1)}) + y_{41}^{(5)}V_1^{(5)}V_4^{(5)} \sin(-\theta_{41}^{(5)} - \delta_1^{(5)} + \delta_4^{(5)}) \\
& + y_{43}^{(5)}V_3^{(5)}V_4^{(5)} \sin(-\theta_{43}^{(5)} - \delta_3^{(5)} + \delta_4^{(5)}) + y_{44}^{(5)}V_4^{(5)}V_4^{(5)} \sin(-\theta_{44}^{(5)} - \delta_4^{(5)} + \delta_4^{(5)}), \\
& = 0.10034 + 44.72 \cdot 1 \cdot 0.9959 \sin(-2.034 - 0 - 0.00341) \\
& + 44.72 \cdot 0.9964 \cdot 0.9959 \sin(-2.034 - 0.00281 - 0.00341) \\
& + 89.44 \cdot (0.9959)^2 \sin(1.1076 + 0.00341 - 0.00341) \\
& + 9.95 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot \sin(-1.6704 - 0 + 0) + 9.95 \cdot 0.1 \cdot 0.1 \cdot \sin(-1.6704 - 0 + 0) \\
& + 19.901 \cdot (0.1)^2 \sin(1.4711 - 0 + 0) = -0.188 \text{ pu}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{r,1}^{(5)} & = \sum_{j=1}^4 y_{1j}^{(5)} |\tilde{V}_j^{(5)}| \cos(\theta_{1j}^{(5)} + \delta_j^{(5)}), \\
& = y_{11}^{(5)} |\tilde{V}_1^{(5)}| \cos(\theta_{11}^{(5)} + \delta_1^{(5)}) + y_{12}^{(5)} |\tilde{V}_2^{(5)}| \cos(\theta_{12}^{(5)} + \delta_2^{(5)}) + y_{13}^{(5)} |\tilde{V}_3^{(5)}| \cos(\theta_{13}^{(5)} + \delta_3^{(5)}) \\
& + y_{14}^{(5)} |\tilde{V}_4^{(5)}| \cos(\theta_{14}^{(5)} + \delta_4^{(5)}), \\
& = 2029.137 \cdot 0.1 \cdot \cos(-1.5684 + 0) + 19.61 \cdot 0.1 \cdot \cos(1.7681 + 0) + 0 \\
& + 9.9503 \cdot 0.1 \cdot \cos(-1.4711 + 0) = 0.201 \text{ pu}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{i,1}^{(5)} & = \sum_{j=1}^4 y_{1j}^{(5)} |\tilde{V}_j^{(5)}| \sin(\theta_{1j}^{(5)} + \delta_j^{(5)}), \\
& = y_{11}^{(5)} |\tilde{V}_1^{(5)}| \sin(\theta_{11}^{(5)} + \delta_1^{(5)}) + y_{12}^{(5)} |\tilde{V}_2^{(5)}| \sin(\theta_{12}^{(5)} + \delta_2^{(5)}) + y_{13}^{(5)} |\tilde{V}_3^{(5)}| \sin(\theta_{13}^{(5)} + \delta_3^{(5)}) \\
& + y_{14}^{(5)} |\tilde{V}_4^{(5)}| \sin(\theta_{14}^{(5)} + \delta_4^{(5)}), \\
& = 2029.137 \cdot 0.1 \cdot \sin(-1.5684 + 0) + 19.61 \cdot 0.1 \cdot \sin(1.7681 + 0) + 0 \\
& + 9.9503 \cdot 0.1 \cdot \sin(-1.4711 + 0) = -201.98 \text{ pu}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{r,2}^{(5)} & = \sum_{j=1}^4 y_{2j}^{(5)} |\tilde{V}_j^{(5)}| \cos(\theta_{2j}^{(5)} + \delta_j^{(5)}), \\
& = y_{21}^{(5)} |\tilde{V}_1^{(5)}| \cos(\theta_{21}^{(5)} + \delta_1^{(5)}) + y_{22}^{(5)} |\tilde{V}_2^{(5)}| \cos(\theta_{22}^{(5)} + \delta_2^{(5)}) + y_{23}^{(5)} |\tilde{V}_3^{(5)}| \cos(\theta_{23}^{(5)} + \delta_3^{(5)}) \\
& + y_{24}^{(5)} |\tilde{V}_4^{(5)}| \cos(\theta_{24}^{(5)} + \delta_4^{(5)}), \\
& = 19.61 \cdot 0.1 \cdot \cos(1.7681 + 0) + 22.0847 \cdot 0.1 \cdot \cos(-1.3900 + 0) \\
& + 2.4969 \cdot 0.1 \cdot \cos(1.62066 + 0) + 0 = 0.000255
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{i,2}^{(5)} &= \sum_{j=1}^4 y_{2j}^{(5)} |\tilde{V}_j^{(5)}| \sin(\theta_{2j}^{(5)} + \delta_j^{(5)}), \\
&= y_{21}^{(5)} |\tilde{V}_1^{(5)}| \sin(\theta_{21}^{(5)} + \delta_1^{(5)}) + y_{22}^{(5)} |\tilde{V}_2^{(5)}| \sin(\theta_{22}^{(5)} + \delta_2^{(5)}) + y_{23}^{(5)} |\tilde{V}_3^{(5)}| \sin(\theta_{23}^{(5)} + \delta_3^{(5)}) \\
&\quad + y_{24}^{(5)} |\tilde{V}_4^{(5)}| \sin(\theta_{24}^{(5)} + \delta_4^{(5)}), \\
&= 19.61 \cdot 0.1 \cdot \sin(1.7681 + 0) + 22.0847 \cdot 0.1 \cdot \sin(-1.3900 + 0) \\
&\quad + 2.4969 \cdot 0.1 \cdot \sin(1.62066 + 0) + 0 = -0.000620
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{r,3}^{(5)} &= \sum_{j=1}^4 y_{3j}^{(5)} |\tilde{V}_j^{(5)}| \cos(\theta_{3j}^{(5)} + \delta_j^{(5)}), \\
&= y_{31}^{(5)} |\tilde{V}_1^{(5)}| \cos(\theta_{31}^{(5)} + \delta_1^{(5)}) + y_{32}^{(5)} |\tilde{V}_2^{(5)}| \cos(\theta_{32}^{(5)} + \delta_2^{(5)}) + y_{33}^{(5)} |\tilde{V}_3^{(5)}| \cos(\theta_{33}^{(5)} + \delta_3^{(5)}) \\
&\quad + y_{34}^{(5)} |\tilde{V}_4^{(5)}| \cos(\theta_{34}^{(5)} + \delta_4^{(5)}), \\
&= 0 + 2.4969 \cdot 0.1 \cdot \cos(1.62066 + 0) + 12.445 \cdot 0.1 \cdot \cos(-1.4811 + 0) \\
&\quad + 9.9504 \cdot 0.1 \cdot \cos(1.6704) = 0.000104.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{i,3}^{(5)} &= \sum_{j=1}^4 y_{3j}^{(5)} |\tilde{V}_j^{(5)}| \sin(\theta_{3j}^{(5)} + \delta_j^{(5)}), \\
&= y_{31}^{(5)} |\tilde{V}_1^{(5)}| \sin(\theta_{31}^{(5)} + \delta_1^{(5)}) + y_{32}^{(5)} |\tilde{V}_2^{(5)}| \sin(\theta_{32}^{(5)} + \delta_2^{(5)}) + y_{33}^{(5)} |\tilde{V}_3^{(5)}| \sin(\theta_{33}^{(5)} + \delta_3^{(5)}) \\
&\quad + y_{34}^{(5)} |\tilde{V}_4^{(5)}| \sin(\theta_{34}^{(5)} + \delta_4^{(5)}), \\
&= 2.4969 \cdot 0.1 \cdot \sin(1.62066 + 0) + 12.445 \cdot 0.1 \cdot \sin(-1.4811 + 0) \\
&\quad + 9.9504 \cdot 0.1 \cdot \sin(1.6704) = 0.0000082.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{r,4}^{(5)} + G_{r,4}^{(5)} &= \sum_{j=1}^4 y_{4j}^{(5)} |\tilde{V}_j^{(5)}| \cos(\theta_{4j}^{(5)} + \delta_j^{(5)}) + G_{r,4}^{(5)}, \\
&= y_{41}^{(5)} |\tilde{V}_1^{(5)}| \cos(\theta_{41}^{(5)} + \delta_1^{(5)}) + y_{43}^{(5)} |\tilde{V}_3^{(5)}| \cos(\theta_{43}^{(5)} + \delta_3^{(5)}) + y_{44}^{(5)} |\tilde{V}_4^{(5)}| \cos(\theta_{44}^{(5)} + \delta_4^{(5)}) + G_{r,4}^{(5)} \\
&= 9.9503 \cdot 0.1 \cdot \cos(1.6704 + 0) + 9.9504 \cdot 0.1 \cdot \cos(1.6704 + 0) \\
&\quad + 19.901 \cdot 0.1 \cdot \cos(-1.4711 + 0) + 0.2994 = 0.2996.
\end{aligned}$$

$$I_{i,4}^{(5)} + G_{i,4}^{(5)} = \sum_{j=1}^4 y_{4j}^{(5)} |\tilde{V}_j^{(5)}| \sin(\theta_{4j}^{(5)} + \delta_j^{(5)}) + G_{i,4}^{(5)},$$

$$\begin{aligned}
&= y_{41}^{(5)} |\tilde{V}_1^{(5)}| \sin(\theta_{41}^{(5)} + \delta_1^{(5)}) + y_{43}^{(5)} |\tilde{V}_3^{(5)}| \sin(\theta_{43}^{(5)} + \delta_3^{(5)}) + y_{44}^{(5)} |\tilde{V}_4^{(5)}| \sin(\theta_{44}^{(5)} + \delta_4^{(5)}) + G_{r,4}^{(5)} \\
&= 9.9503 \cdot 0.1 \cdot \sin(1.6704 + 0) + 9.9504 \cdot 0.1 \cdot \sin(1.6704 + 0) \\
&+ 19.901 \cdot 0.1 \cdot \sin(-1.4711 + 0) - 0.003036 = -0.00325.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{r,4}^{(1)} + G_{r,4}^{(1)} &= \sum_{j=1}^4 y_{4j}^{(1)} |\tilde{V}_j^{(1)}| \cos(\theta_{4j}^{(1)} + \delta_j^{(1)}) + G_{r,4}^{(1)}, \\
&= y_{41} |\tilde{V}_1^{(1)}| \cos(\theta_{41}^{(1)} + \delta_1^{(1)}) + y_{43} |\tilde{V}_3^{(1)}| \cos(\theta_{43}^{(1)} + \delta_3^{(1)}) + y_{44} |\tilde{V}_4^{(1)}| \cos(\theta_{44}^{(1)} + \delta_4^{(1)}) + G_{r,4}^{(1)}, \\
&= 44.72 \cdot 1.0 \cdot \cos(2.034 + 0) + 44.72 \cdot 0.9964 \cdot \cos(2.034 - 0.00281) \\
&+ 89.44 \cdot 0.9960 \cdot \cos(-1.1076 - 0.003414) + 0.2514 = 0.0027
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{i,4}^{(1)} + G_{i,4}^{(1)} &= \sum_{j=1}^4 y_{4j}^{(1)} |\tilde{V}_j^{(1)}| \sin(\theta_{4j}^{(1)} + \delta_j^{(1)}) + G_{i,4}^{(1)}, \\
&= y_{41} |\tilde{V}_1^{(1)}| \sin(\theta_{41}^{(1)} + \delta_1^{(1)}) + y_{43} |\tilde{V}_3^{(1)}| \sin(\theta_{43}^{(1)} + \delta_3^{(1)}) + y_{44} |\tilde{V}_4^{(1)}| \sin(\theta_{44}^{(1)} + \delta_4^{(1)}) + G_{i,4}^{(1)}, \\
&= 44.72 \cdot 1.0 \cdot \sin(2.034 + 0) + 44.72 \cdot 0.9964 \cdot \sin(2.034 - 0.00281) \\
&+ 89.44 \cdot 0.9960 \cdot \sin(-1.1076 - 0.003414) - 0.1015 = -0.0054
\end{aligned}$$

و در نتیجه بردار اختلاف بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{M}^0 &= (-0.0170, 0.083, -0.00325, 0.00192, 0.037, -0.188, 0.201, -201.98, 0.000255, -0.000620 \\
&0.000104, 0.0000082, 0.2996, -0.00325, 0.0027, -0.0064)
\end{aligned}$$

با توجه به اینکه درایه‌های بردار اختلاف کوچکتر از 0.0001 نیستند، لذا الگوریتم باید تکرار شود.

مرحله چهارم: محاسبه ماتریس ژاکوبین

$$\bar{J}^0 = \begin{matrix} \delta_2^{(1)} & V_2^{(1)} & \delta_3^{(1)} & V_3^{(1)} & \delta_4^{(1)} & V_4^{(1)} & \delta_1^{(5)} & V_1^{(5)} & V_2^{(5)} & V_3^{(5)} & \delta_3^{(5)} & V_3^{(5)} & \delta_4^{(5)} & V_4^{(5)} & \alpha & \beta \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ J_{1,1}^0 & J_{1,2}^0 & J_{1,3}^0 & J_{1,4}^0 & J_{1,5}^0 & J_{1,6}^0 & J_{1,7}^0 & J_{1,8}^0 & J_{1,9}^0 & J_{1,10}^0 & J_{1,11}^0 & J_{1,12}^0 & J_{1,13}^0 & J_{1,14}^0 & J_{1,15}^0 & J_{1,16}^0 \\ J_{2,1}^0 & J_{2,2}^0 & J_{2,3}^0 & J_{2,4}^0 & J_{2,5}^0 & J_{2,6}^0 & J_{2,7}^0 & J_{2,8}^0 & J_{2,9}^0 & J_{2,10}^0 & J_{2,11}^0 & J_{2,12}^0 & J_{2,13}^0 & J_{2,14}^0 & J_{2,15}^0 & J_{2,16}^0 \\ J_{3,1}^0 & J_{3,2}^0 & J_{3,3}^0 & J_{3,4}^0 & J_{3,5}^0 & J_{3,6}^0 & J_{3,7}^0 & J_{3,8}^0 & J_{3,9}^0 & J_{3,10}^0 & J_{3,11}^0 & J_{3,12}^0 & J_{3,13}^0 & J_{3,14}^0 & J_{3,15}^0 & J_{3,16}^0 \\ J_{4,1}^0 & J_{4,2}^0 & J_{4,3}^0 & J_{4,4}^0 & J_{4,5}^0 & J_{4,6}^0 & J_{4,7}^0 & J_{4,8}^0 & J_{4,9}^0 & J_{4,10}^0 & J_{4,11}^0 & J_{4,12}^0 & J_{4,13}^0 & J_{4,14}^0 & J_{4,15}^0 & J_{4,16}^0 \\ J_{5,1}^0 & J_{5,2}^0 & J_{5,3}^0 & J_{5,4}^0 & J_{5,5}^0 & J_{5,6}^0 & J_{5,7}^0 & J_{5,8}^0 & J_{5,9}^0 & J_{5,10}^0 & J_{5,11}^0 & J_{5,12}^0 & J_{5,13}^0 & J_{5,14}^0 & J_{5,15}^0 & J_{5,16}^0 \\ J_{6,1}^0 & J_{6,2}^0 & J_{6,3}^0 & J_{6,4}^0 & J_{6,5}^0 & J_{6,6}^0 & J_{6,7}^0 & J_{6,8}^0 & J_{6,9}^0 & J_{6,10}^0 & J_{6,11}^0 & J_{6,12}^0 & J_{6,13}^0 & J_{6,14}^0 & J_{6,15}^0 & J_{6,16}^0 \\ J_{7,1}^0 & J_{7,2}^0 & J_{7,3}^0 & J_{7,4}^0 & J_{7,5}^0 & J_{7,6}^0 & J_{7,7}^0 & J_{7,8}^0 & J_{7,9}^0 & J_{7,10}^0 & J_{7,11}^0 & J_{7,12}^0 & J_{7,13}^0 & J_{7,14}^0 & J_{7,15}^0 & J_{7,16}^0 \\ J_{8,1}^0 & J_{8,2}^0 & J_{8,3}^0 & J_{8,4}^0 & J_{8,5}^0 & J_{8,6}^0 & J_{8,7}^0 & J_{8,8}^0 & J_{8,9}^0 & J_{8,10}^0 & J_{8,11}^0 & J_{8,12}^0 & J_{8,13}^0 & J_{8,14}^0 & J_{8,15}^0 & J_{8,16}^0 \\ J_{9,1}^0 & J_{9,2}^0 & J_{9,3}^0 & J_{9,4}^0 & J_{9,5}^0 & J_{9,6}^0 & J_{9,7}^0 & J_{9,8}^0 & J_{9,9}^0 & J_{9,10}^0 & J_{9,11}^0 & J_{9,12}^0 & J_{9,13}^0 & J_{9,14}^0 & J_{9,15}^0 & J_{9,16}^0 \\ J_{10,1}^0 & J_{10,2}^0 & J_{10,3}^0 & J_{10,4}^0 & J_{10,5}^0 & J_{10,6}^0 & J_{10,7}^0 & J_{10,8}^0 & J_{10,9}^0 & J_{10,10}^0 & J_{10,11}^0 & J_{10,12}^0 & J_{10,13}^0 & J_{10,14}^0 & J_{10,15}^0 & J_{10,16}^0 \\ J_{11,1}^0 & J_{11,2}^0 & J_{11,3}^0 & J_{11,4}^0 & J_{11,5}^0 & J_{11,6}^0 & J_{11,7}^0 & J_{11,8}^0 & J_{11,9}^0 & J_{11,10}^0 & J_{11,11}^0 & J_{11,12}^0 & J_{11,13}^0 & J_{11,14}^0 & J_{11,15}^0 & J_{11,16}^0 \\ J_{12,1}^0 & J_{12,2}^0 & J_{12,3}^0 & J_{12,4}^0 & J_{12,5}^0 & J_{12,6}^0 & J_{12,7}^0 & J_{12,8}^0 & J_{12,9}^0 & J_{12,10}^0 & J_{12,11}^0 & J_{12,12}^0 & J_{12,13}^0 & J_{12,14}^0 & J_{12,15}^0 & J_{12,16}^0 \\ J_{13,1}^0 & J_{13,2}^0 & J_{13,3}^0 & J_{13,4}^0 & J_{13,5}^0 & J_{13,6}^0 & J_{13,7}^0 & J_{13,8}^0 & J_{13,9}^0 & J_{13,10}^0 & J_{13,11}^0 & J_{13,12}^0 & J_{13,13}^0 & J_{13,14}^0 & J_{13,15}^0 & J_{13,16}^0 \\ J_{14,1}^0 & J_{14,2}^0 & J_{14,3}^0 & J_{14,4}^0 & J_{14,5}^0 & J_{14,6}^0 & J_{14,7}^0 & J_{14,8}^0 & J_{14,9}^0 & J_{14,10}^0 & J_{14,11}^0 & J_{14,12}^0 & J_{14,13}^0 & J_{14,14}^0 & J_{14,15}^0 & J_{14,16}^0 \\ J_{15,1}^0 & J_{15,2}^0 & J_{15,3}^0 & J_{15,4}^0 & J_{15,5}^0 & J_{15,6}^0 & J_{15,7}^0 & J_{15,8}^0 & J_{15,9}^0 & J_{15,10}^0 & J_{15,11}^0 & J_{15,12}^0 & J_{15,13}^0 & J_{15,14}^0 & J_{15,15}^0 & J_{15,16}^0 \\ J_{16,1}^0 & J_{16,2}^0 & J_{16,3}^0 & J_{16,4}^0 & J_{16,5}^0 & J_{16,6}^0 & J_{16,7}^0 & J_{16,8}^0 & J_{16,9}^0 & J_{16,10}^0 & J_{16,11}^0 & J_{16,12}^0 & J_{16,13}^0 & J_{16,14}^0 & J_{16,15}^0 & J_{16,16}^0 \end{matrix} \begin{matrix} \leftarrow \Delta P_2^{(1)} \\ \leftarrow \Delta Q_2^{(1)} \\ \leftarrow \Delta P_3^{(1)} \\ \leftarrow \Delta Q_3^{(1)} \\ \leftarrow \Delta P_4^{(1)} \\ \leftarrow \Delta Q_4^{(1)} \\ \leftarrow \Delta I_{r,1}^{(5)} \\ \leftarrow \Delta I_{i,1}^{(5)} \\ \leftarrow \Delta I_{r,2}^{(5)} \\ \leftarrow \Delta I_{i,2}^{(5)} \\ \leftarrow \Delta I_{r,3}^{(5)} \\ \leftarrow \Delta I_{i,3}^{(5)} \\ \leftarrow \Delta I_{r,4}^{(5)} \\ \leftarrow \Delta I_{i,4}^{(5)} \\ \leftarrow \Delta I_{r,4}^{(1)} \\ \leftarrow \Delta I_{i,4}^{(1)} \end{matrix}$$

ردیف بالای و ستون سمت راست ماتریس فوق که جزو ماتریس ژاکوبین نیست، کمک می کند تا به آسانی

درایه های ماتریس ژاکوبین بدست آید. به عنوان نمونه می توان به روابط زیر توجه کرد.

$$J_{3,5}^0 = \frac{\partial(\Delta P_3^{(1)})}{\partial(\delta_4^{(1)})}, \quad J_{3,10}^0 = \frac{\partial(\Delta P_3^{(1)})}{\partial(V_2^{(5)})}$$

$$J_{8,5}^0 = \frac{\partial(\Delta I_{i,1}^{(5)})}{\partial(\delta_4^{(1)})}, \quad J_{8,10}^0 = \frac{\partial(\Delta I_{i,i}^{(5)})}{\partial(V_2^{(5)})},$$

$$J_{9,11}^0 = \frac{\partial(\Delta I_{r,2}^{(5)})}{\partial(\delta_5^{(5)})}, \quad \text{and} \quad J_{12,16}^0 = \frac{\partial(\Delta I_{i,3}^{(5)})}{\partial(\beta)}.$$

زیر ماتریس های تعریف شده به شکل زیر ساختار کلی ماتریس ژاکوبین را نشان می دهند.

$$\bar{J} = \begin{vmatrix} \bar{J}^{(1)} & \bar{J}^{(5)} & \bar{0}_{6,2} \\ \bar{G}^{(5,1)} & \bar{Y}^{(5,5)} + \bar{G}^{(5,5)} & \bar{H}^{(5)} \\ \bar{Y}^{(1,1)} + \bar{G}^{(1,1)} & \bar{G}^{(1,5)} & \bar{H}^{(1)} \end{vmatrix}$$

که در آن

$$\bar{J}^{(1)} = \begin{vmatrix} 61.68 & 52.932 & -11.764 & -2.944 & 0 & 0 \\ -52.94 & 61.945 & 2.944 & -11.764 & 0 & 0 \\ -11.764 & -2.944 & 51.772 & 22.917 & -40.0076 & -19.98 \\ 2.944 & -11.764 & -22.926 & 51.773 & 19.982 & -40.0076 \\ 0 & 0 & -40.0076 & -19.982 & 80.015 & 39.961 \\ 0 & 0 & 19.982 & -40.0076 & -39.963 & 80 \end{vmatrix}$$

$$\bar{J}^{(5)} = \begin{vmatrix} & & & \bar{0}_{4 \times 8} & & & & \\ -0.099 & -0.099 & 0 & 0 & -0.099 & -0.09 & 0.198 & 0.198 \\ 0.010 & -0.099 & 0 & 0 & 0.010 & -0.99 & -0.020 & 1.98 \end{vmatrix}$$

$$\bar{Y}^{(1,1)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -39.889 & -19.89 & 79.81 & 39.73 \\ 0 & 0 & -19.81 & 40.06 & 39.56 & -80.14 \end{vmatrix}$$

$$\bar{Y}^{(5,5)} = \begin{vmatrix} 202.91 & 4.84 & -1.92 & -3.85 & 0 & 0 & -0.99 & -0.99 \\ 0.48 & -2029.1 & -0.39 & 19.23 & 0 & 0 & -0.10 & 9.90 \\ -1.92 & -3.846 & 2.17 & 3.97 & -0.25 & -0.13 & 0 & 0 \\ -0.39 & 19.23 & 0.40 & -21.73 & -0.01 & 2.45 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.25 & -0.13 & 1.24 & 1.12 & -0.99 & -0.99 \\ 0 & 0 & -0.01 & 2.49 & 0.11 & -12.40 & -0.10 & 9.90 \\ -0.99 & -0.99 & 0 & 0 & -0.99 & -0.99 & 1.98 & 1.98 \\ -0.01 & 9.90 & 0 & 0 & -0.01 & 9.90 & 0.20 & -19.80 \end{vmatrix}$$

و همچنین با استفاده از روابط زیر می توان زیر ماتریس های دیگر را نیز بدست آورد.

$$\frac{\partial G_{r,4}^{(1)}}{\partial \delta_4^{(1)}} = -\frac{P_4^{(1)} \sin \gamma_4^{(1)}}{V_4^{(1)} \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})} = 0.1016$$

$$\frac{\partial G_{r,4}^{(1)}}{\partial V_4^{(1)}} = -\frac{P_4^{(1)} \cos \gamma_4^{(1)}}{(V_4^{(1)})^2 \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})} = -0.252$$

$$\frac{\partial G_{i,4}^{(1)}}{\partial \delta_4^{(1)}} = -\frac{P_4^{(1)} \cos \gamma_4^{(1)}}{V_4^{(1)} \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})} = 0.250$$

$$\frac{\partial G_{i,4}^{(1)}}{\partial V_4^{(1)}} = -\frac{P_4^{(1)} \sin \gamma_4^{(1)}}{(V_4^{(1)})^2 \cos(\delta_4^{(1)} - \gamma_4^{(1)})} = 0.102$$

و در نتیجه

$$\bar{G}^{(1,1)} = \begin{vmatrix} & 0.102 & -0.252 \\ \bar{0}_{2 \times 6} & & \\ & 0.250 & 0.102 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial G_{r,4}^{(5)}}{\partial \delta_4^{(1)}} = -0.9(V_4^{(1)})^3 \sin(3\delta_4^{(1)}) = 0.00896$$

$$\frac{\partial G_{r,4}^{(5)}}{\partial V_4^{(1)}} = 0.9(V_4^{(1)})^2 \cos(3\delta_4^{(1)}) = 0.893$$

$$\frac{\partial G_{i,4}^{(5)}}{\partial \delta_4^{(1)}} = 0.9(V_4^{(1)})^3 \cos(3\delta_4^{(1)}) = 0.8894$$

$$\frac{\partial G_{i,4}^{(5)}}{\partial V_4^{(1)}} = 0.9(V_4^{(1)})^2 \sin(3\delta_4^{(1)}) = -0.009.$$

و

$$\frac{\partial G_{r,4}^{(5)}}{\partial \delta_4^{(5)}} = -0.9(V_4^{(5)})^2 \sin(3\delta_4^{(5)}) = 0.00$$

$$\frac{\partial G_{r,4}^{(5)}}{\partial V_4^{(5)}} = 0.6V_4^{(5)} \cos(3\delta_4^{(5)}) = 0.06$$

$$\frac{\partial G_{i,4}^{(5)}}{\partial \delta_4^{(5)}} = 0.9(V_4^{(5)})^2 \cos(3\delta_4^{(5)}) = 0.006$$

$$\frac{\partial G_{i,4}^{(5)}}{\partial V_4^{(5)}} = 0.6V_4^{(5)} \sin(3\delta_4^{(5)}) = 0.00.$$

و در نتیجه

$$\bar{G}^{(5,1)} = \begin{vmatrix} \bar{0}_{6 \times 8} & & & \\ & 0.00896 & 0.893 & \\ \bar{0}_{2 \times 6} & & & \\ & & & 0.8894 & -0.009 \end{vmatrix}$$

و

$$\bar{G}^{(5,5)} = \begin{vmatrix} \bar{0}_{6 \times 8} & & & \\ & 0 & 0.06 & \\ \bar{0}_{2 \times 6} & & & \\ & & & 0.006 & 0 \end{vmatrix}$$

زیر ماتریس‌های $H^{(1)}$ و $H^{(5)}$ بدلیل عدم وابستگی بار غیر خطی در شینه شماره ۴ به زاویه‌های α و β

برابر صفر خواهند بود. اما با توجه به اینکه اگر برای این دو ماتریس صفر منظور گردد، دو ستون صفر در

ماتریس ژاکوبین بوجود می‌آید که موجب می‌گردد این ماتریس وارون ناپذیر گردد. لذا برای این دو زیر

ماتریس مقادیر دلخواه غیر صفر لحاظ می‌شود. در نهایت ماتریس ژاکوبین بصورت زیر خواهد بود.

-61.57	52.71	-11.70	-2.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-52.79	61.52	2.89	-11.74	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-11.69	-2.96	51.37	22.86	-39.71	-19.90	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2.95	-11.72	-22.77	51.58	19.82	-39.87	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	-39.66	-19.94	79.45	39.59	-0.099	-0.099	0	0	-0.099	-0.099	0.198	0.198	0	0
0	0	19.86	-39.83	-39.93	79.58	0.010	-0.99	0	0	0.010	-0.99	-0.020	1.98	0	0
0	0	0	0	0	0	202.9	4.84	-1.92	-3.85	0	0	-0.99	-0.99	0	0
0	0	0	0	0	0	0.48	-2029	-0.39	19.23	0	0	-0.10	9.90	0	0
0	0	0	0	0	0	-1.92	-3.846	2.17	3.97	-0.25	-0.13	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.39	19.23	0.40	-21.73	-0.01	2.45	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.25	-0.13	1.24	1.12	-0.99	-0.99	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-0.01	2.49	0.11	-12.40	-0.10	9.90	0	0
0	0	0	0	0.009	0.893	-0.99	-0.99	0	0	-0.99	-0.99	1.98	2.04	0	0
0	0	0	0	0.889	-0.009	-0.01	9.90	0	0	-0.01	9.90	0.201	-19.80	0	0
0	0	-39.89	-19.89	79.91	39.48	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
0	0	-19.81	40.06	39.81	-80.04	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3

و با استفاده از این ماتریس می‌توان نوشت:

$$\Delta \bar{U}^0 = (\bar{J}^0)^{-1} \begin{bmatrix} 3.43472 E - 6 \\ -1.33365 E - 6 \\ -7.62939 E - 6 \\ -3.81470 E - 6 \\ 2.99421 E - 2 \\ 2.97265 E - 4 \\ 4.217029 E - 6 \\ -200.0 \\ -4.09782 E - 8 \\ 2.384186 E - 7 \\ -1.93715 E - 7 \\ -5.960464 E - 8 \\ 0.29935 \\ -3.03515 E - 3 \\ -1.78814 E - 7 \\ 8.86619 E - 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.20815 E - 6 \\ -8.59742 E - 7 \\ 9.552948 E - 6 \\ 1.54111 E - 6 \\ 1.184274 E - 5 \\ 2.3572 E - 6 \\ 1.46588 E - 3 \\ 0.10000228 \\ 2.38763 E - 2 \\ 0.1005407 \\ 0.2042002 \\ 0.1021379 \\ 0.249194 \\ 0.1027635 \\ -- \\ -- \end{bmatrix}$$

بردار ولتاژ به روز شده برای تکرار دوم بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \bar{U}^1 = \bar{U}^0 - \Delta \bar{U}^0 = & (-2.68332E - 4, 0.99759, \\ & -2.80029E - 3, 0.99640, -3.4257E - 3, 0.99594, \\ & -1.465844E - 3, -2.28E - 6, -2.38763E - 2, \\ & -5.407E - 4, -0.2042, -2.138E - 3, -0.24919, \\ & -2.7635E - 3, 0, 0)' \end{aligned}$$

همانطور که مشاهده می‌شود کلیه دامنه ولتاژها منفی هستند. به منظور مثبت کردن دامنه ولتاژها، به اندازه

π رادیان جابجایی فاز انجام می‌دهیم.

$$\bar{U}^1 = (-2.68332E - 4, 0.99759, -2.80029E - 3, 0.99640, -3.4257E - 3, 0.99594, 3.14013, 2.28E - 6, 3.11772, 5.407E - 4, 2.93738, 2.138E - 3, 2.89239, 2.7635E - 3, 0, 0)^t.$$

جریان‌های بار غیر خطی جدید چنین می‌شوند:

$$G_{r,4}^{(1)} = 0.256629$$

$$G_{i,4}^{(1)} = -0.1011142$$

$$G_{r,4}^{(5)} = 0.2965726$$

$$G_{i,4}^{(5)} = -2.59613E - 3$$

و در نهایت بردار اختلاف جدید

$$\Delta \bar{W}^1 = (5.342E - 6, -3.800E - 7, 5.722E - 6, 3.815E - 6, -1.403E - 3, 4.332E - 4, -2.269E - 3, -3.300E - 2, -2.677E - 3, 6.475E - 3, -1.021E - 3, -2.105E - 3, 0.3023, 3.015E - 2, -6.264E - 4, -1.473E - 4)^t.$$

همانطور که مشاهده می‌شود، درایه‌های بردار اختلاف جدید نیز همگی کوچکتر از 0.0001 نیستند. لذا

الگوریتم باید تکرار شود. پس از ۸ بار تکرار پاسخ همگرا شده و نتیجه نهایی بصورت زیر بدست می‌آید:

نتیجه پخش بار اصلی

From Bus	Bus voltage		Bus generation (G) and load (L) powers				To Bus	Line power*	
	V (%)	δ (°)	P_G (%)	Q_G (%)	P_L (%)	Q_L (%)		P_{line} (%)	Q_{line} (%)
1	100.0	0.00	35.16	20.90	0.00	0.00	2	13.35	10.81
							4	21.81	10.09
2	99.76	-0.01	0.00	0.00	10.00	10.00	1	-13.33	-10.78
							3	3.32	0.78
3	99.64	-0.16	0.00	0.00	0.00	0.00	2	-3.32	-0.77
							4	3.32	0.77
4	99.58	-0.19	0.00	0.00	25.00	10.00	3	-3.32	-0.77
							1	-21.75	-9.98

نتیجه پخش بار هارمونیکی برای هارمونیک پنجم (فرکانس ۳۰۰ هرتز)

From bus	Bus voltage		To bus	Line power ^a		Line current ^a	
	V (%)	δ (°)		P_{line} (%)	Q_{line} (%)	Magnitude (%)	Angle (°)
1	0.0148	-90.57	2	0.000015	-0.000675	4.563896	-1.88
			4	-0.000015	-0.003707	25.042787	-0.33
			Neutral shunt	0.000000	0.004382	29.605302	179.43
2	0.2472	-102.44	1	0.002067	0.011090	4.563896	178.12
			3	-0.002067	-0.011090	4.563895	-1.88
3	2.0731	-95.66	2	0.006233	0.094407	4.563895	178.12
			4	-0.006233	-0.094406	4.563865	-1.88
4	2.5315	-96.01	3	0.008315	0.115235	4.563865	178.12
			1	0.062730	0.630848	25.042787	179.67
			Neutral nonlinear	-0.071046	-0.746085	29.605308	-0.57

جریان‌ها و توان‌های کلی

From bus	To bus	Line current				Line power			
		Fundamental value (%)	rms value (%)	Peak value (%)	THD _i (%)	P (%)	Q (%)	D (%)	S (%)
1	2	17.18	17.78	19.26	0.9665	13.35	10.81	4.57	17.78
1	4	24.03	34.71	46.94	0.6923	21.81	10.09	25.04	34.71
2	1	17.18	17.78	19.26	0.9665	-13.32	-10.77	4.59	17.73
2	3	3.42	5.70	7.90	0.6000	3.32	0.77	4.56	5.69
3	2	3.42	5.70	7.90	0.6000	-3.32	-0.68	4.57	5.69
3	4	3.42	5.71	7.90	0.6000	3.32	0.68	4.57	5.69
4	3	3.42	5.71	7.90	0.6000	-3.31	-0.65	4.57	5.69
4	1	24.03	34.71	46.94	0.6923	-21.69	-9.35	25.25	34.57
4	Neutral nonlinear	27.04	40.09	54.76	0.6744	24.93	9.25	29.80	39.94

خلاصه ولتاژ شینه‌ها

Bus number	Fundamental value (%)	rms value (%)	Peak value (%)	THD _v (%)
1	100.00	100.00	100.00	1.0000
2	99.76	99.76	99.71	1.0000
3	99.63	99.65	99.97	0.9998
4	99.58	99.61	100.11	0.9997

تمرین شماره ۱۱:

برنامه‌ای بنویسید که مسأله پخش بار هارمونیکی شبکه نمونه چهار شینه را حل نماید.